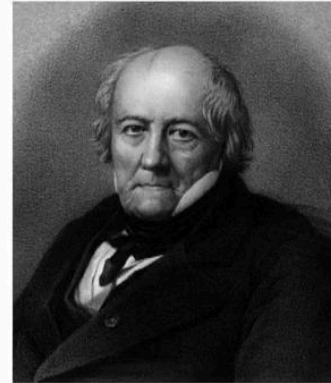


Thermodynamique

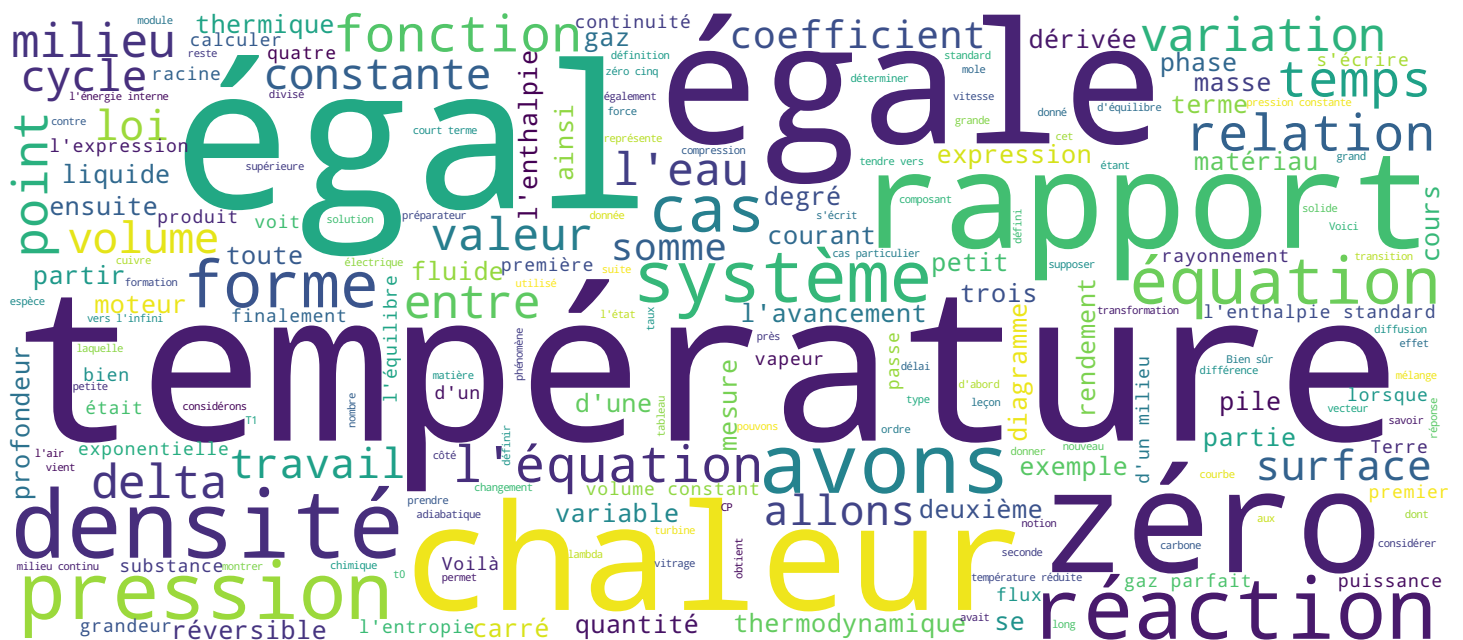
Transfert conductif en régime non stationnaire



Jean-Baptiste Biot, 1774-1862



Prof. Marwan Brouche



Search MOOC



Video



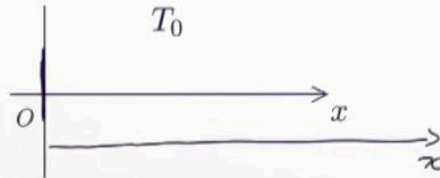
Régime non stationnaire - Réponse à court terme



Milieu homogène, isotrope, ETL

μ : masse volumique

c : chaleur massique



À $t = 0$, on impose T_1 en $x = 0$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}$$

On pose $a = \frac{\lambda}{\mu c}$ [$m^2 s^{-1}$] la diffusivité thermique

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

On pose $u = \frac{x}{2\sqrt{at}}$ et $\theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}$

L'équation à laquelle obéit la température réduite du milieu s'écrit alors :

$$\frac{d^2 \theta}{du^2} + 2u \frac{d\theta}{du} = 0$$

Thermodynamique

Nous allons traiter maintenant la deuxième partie de notre cours, à savoir la conduction aux régimes non stationnaire, c'est à dire lorsque la température dépend de l'espace et du temps. Pour traiter cette partie, on va faire deux exemples. La réponse est un milieu à une certaine excitation, mais sa réponse à court terme et la réponse d'un milieu à une excitation sinusoïdale. Le long de cette partie là, on va supposer toujours que notre conduction est unidirectionnelle. On considère un milieu homogène et isotrope et en équilibre thermodynamique local. Ce milieu est toujours caractérisé par sa masse volumique μ et sa chaleur massique. C'est. Ce milieu va s'étendre de x égal à zéro jusqu'à l'infini et il se trouve à la température. Homogène T_0 à l'instant T égal à zéro. On peut en impose en x égal à zéro, c'est à dire sur toute cette section. La température T_1 . La température du milieu va aboutir à l'équation dite de la chaleur qu'on avait établie lors de la première partie de notre cours. On va introduire un paramètre thermique supplémentaire qui est défini par le rapport de λ sur μc qu'on appellera la diffusivité thermique. Pour résoudre une telle équation.

Notes

Summary



0m 04s

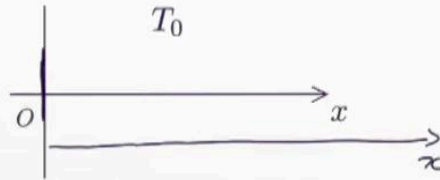
Régime non stationnaire - Réponse à court terme



Milieu homogène, isotrope, ETL

μ : masse volumique

c : chaleur massique



À $t = 0$, on impose T_1 en $x = 0$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}$$

On pose $a = \frac{\lambda}{\mu c}$ [$m^2 s^{-1}$] la diffusivité thermique

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

On pose $u = \frac{x}{2\sqrt{at}}$ et $\theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}$

L'équation à laquelle obéit la température réduite du milieu s'écrit alors :

$$\frac{d^2 \theta}{du^2} + 2u \frac{d\theta}{du} = 0$$

Thermodynamique

On passe par un changement de variable. On pose u est égale x sur deux racine dt et a est égale à témoin t_1 sur t_0 t_1 . On peut remarquer que ceux des variables sont sans dimension et on peut obtenir l'équation à laquelle obéit la température réduite du milieu et qui va s'écrire sous la forme de la dérivée seconde par rapport au carré plus deux fois u . La dérivée de tête par rapport à u va être égale à zéro.

Notes

Summary



1m 23s

Fonction d'erreur

u	erf(u)	u	erf(u)	u	erf(u)	u	erf(u)
0	0	0,3	0,328627	0,8	0,742101	1,8	0,989091
0,05	0,056372	0,4	0,428392	1	0,842701	2	0,995322
0,1	0,112463	0,5	0,520500	1,2	0,910314	2,5	0,999593
0,15	0,167996	0,6	0,603856	1,4	0,952285	3	0,999978
0,2	0,222703	0,7	0,677801	1,6	0,976348	∞	1

La solution de l'équation précédente s'écrit:

$$\theta(u) = C \int_0^u e^{-v^2} dv$$

Pour calculer C , on utilise les conditions initiales:

à $t = 0$, $u = \frac{x}{2\sqrt{at}} \rightarrow \infty$ et $\theta = \frac{T-T_1}{T_0-T_1} = 1$

D'où $\theta(\infty) = C \int_0^\infty e^{-v^2} dv = 1$

Or, $\int_0^\infty e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'où $C = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

Finalement $\theta(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-v^2} dv = \text{erf}(u)$

Thermodynamique

La solution de l'équation qu'on vient d'obtenir s'écrit sous la forme de u . Égal à l'intégrale entre zéro et u de l'exponentielle de moins de carrés dv . Cette solution est obtenue en intégrant l'équation précédente deux fois par rapport à U . Il nous reste à calculer la constante C et pour cela on utilise les conditions initiales, c'est à dire. Lorsque le temps T tend vers zéro, la variable U va tendre vers l'infini et la température réduite θ va tendre vers un. Donc la fonction θ de l'infini va s'écrire sous la forme de c l'intégrale entre zéro et l'infini de l'exponentielle de v carré dv et va tendre vers un. Et donc on peut obtenir la valeur de la constante C qui s'écrit sous la forme de ces racines. Depuis, finalement, l'expression de la température réduite va s'écrire sous la forme de deux racines de π par l'intégrale entre zéro et u exponentielle de moins vecteur et dv . Cette fonction est connue sous le nom de la fonction d'erreur. Dans le tableau ci contre, on a la tabulation de la fonction d'erreur et dans ce tableau, il y a une valeur particulière qui nous intéresse. C'est la valeur pour laquelle U est égale à zéro cinq et pour cette valeur de U est égale à zéro cinq. On a la fonction d'erreur qui va être égale à zéro cinq. C'est à dire la température réduite va être égale à un demi.

Notes

Summary



Grandeurs caractéristiques

Pour $u = 0,5$ et $\theta = 0,5$

- Délais de diffusion : $\tau = \frac{x^2}{a}$

pour $x = \sqrt{at}$ il faut un temps $\tau = 1s$

pour que $T = \frac{T_1 + T_o}{2}$

(τ est proportionnel à $x^2 \rightarrow$ caractère diffusif de la conduction)

- Profondeur de diffusion : $\chi = \sqrt{at}$

à l'instant $t = 2s$, $T = \frac{T_1 + T_o}{2}$ en $\chi = \sqrt{2a}$

- Si L est l'épaisseur du milieu, on parle d'une réponse à court terme du milieu que si l'on se limite au domaine temporel durant lequel L est très supérieure à $\chi = \sqrt{at}$

Thermodynamique

$$\chi = 10 \text{ cm} \quad \theta = 0,01(T \simeq T_1)$$

Milieu	Delai
Cuivre	7 s
Bois	2 heures

À partir de ces valeurs particulières pour U est égal à un zéro cinq et est égal à zéro cinq. On peut définir des grandeurs caractéristiques. Ces grandeurs sont. La première, c'est le délai de diffusion qui est défini par taux égal à x carré sur un. Pour comprendre le sens physique de cette grandeur, il suffit de prendre. La valeur de x est égale à racine de A . Et de calculer le temps, c'est à dire ce qui va être égal à une seconde pour que la température en se. Cette valeur de X devient égale à T_1 plus zéro sur deux. On peut remarquer que dans la formule de temps, le temps est proportionnel à la variable spatiale au carré, ce qui donne le caractère décisif de la contradiction. La deuxième grandeur qu'on peut définir, c'est la profondeur de décision qui est définie par. Si est égal à la racine de a par le temps également, on va prendre un exemple avec un ordre de grandeur à l'instant t est égal à deux secondes. La température est égale à T_1 zéro sur deux ans qui est égale à racine deux fois. Alors maintenant pour justifier l'appellation de la réponse à court terme. Si on prend elle qui est l'épaisseur du milieu, on parle d'une réponse à court terme du milieu.

Notes

Summary



3m 25s

$$\chi = 10 \text{ cm} \quad \theta = 0,01 (T \simeq T_1)$$

Milieu	Delai
Cuivre	7 s
Bois	2 heures

Grandeurs caractéristiques

Pour $u = 0,5$ et $\theta = 0,5$

• Délais de diffusion : $\tau = \frac{x^2}{a}$

pour $x = \sqrt{at}$ il faut un temps $\tau = 1s$

pour que $T = \frac{T_1 + T_o}{2}$

(τ est proportionnel à $x^2 \rightarrow$ caractère diffusif de la conduction)

• Profondeur de diffusion : $\chi = \sqrt{at}$

à l'instant $t = 2s$, $T = \frac{T_1 + T_o}{2}$ en $\chi = \sqrt{2a}$

- Si L est l'épaisseur du milieu, on parle d'une réponse à court terme du milieu que si l'on se limite au domaine temporel durant lequel L est très supérieure à $\chi = \sqrt{at}$

Thermodynamique

Si l'on se limite au domaine temporel durant lequel l'épaisseur, elle, est très supérieure à la profondeur de fusion qui est égale à la racine de a porté. Dans les tableaux ci contre, on a pris des ordres de grandeur. Proxi est égal à dix cm et on a calculé le temps qu'il faut pour que, à cet endroit là qui est de dix cm, la température réduite devient égale à 0,01, c'est à dire que la température devient pratiquement égale à T_1 et ceci pour deux milieux. Le premier milieu, c'est le cuivre. Et ce délai va être de sept secondes. Et le deuxième milieu, qui a un milieu beaucoup moins conducteur thermique que le cuivre, c'est à dire le bois. Et dans ces cas là, le délai est de 2 h. Ce tableau là. Et ce raisonnement peut expliquer le fait que parfois, lorsqu'on met notre main sur une barre de cuivre qui est portée par exemple à 70 degrés, on a tout de suite une sensation de brûlure. Alors que si on met notre main sur du bois qui est porté à la même température, on a plutôt une sensation de chaleur agréable. Mais bien sûr, ceci est valable uniquement si on se limite à un délai qui n'est pas très grand. C'est à dire ? On revient toujours faire l'hypothèse qu'il faut que l'épaisseur du milieu, elle, soit très supérieure à celle qui est la profondeur de diffusion.

Notes

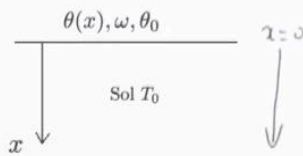
Summary



Milieu homogène, isotrope, ETL

μ : masse volumique

c : chaleur massique



$$\underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{\theta}(x)e^{j\omega t}$$

- Régime périodique dans un demi-espace

Equation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{d^2 \underline{\theta}(x)}{dx^2} = \frac{1}{a} j\omega \underline{\theta}(x)$$

Equation caractéristique: $r^2 = \frac{j\omega}{a}$

$$r_1 = (1 + j)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}; \quad r_2 = -(1 + j)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}$$

On pose $\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$

Thermodynamique

Le deuxième exemple est traité dans le cadre du régime du stationnement. Ça va être la réponse périodique d'un milieu à une excitation périodique. Nous savons que l'air à la surface de la Terre, la température peut varier le long d'une journée, mais elle peut varier également le long de l'année. On va supposer que ces variations sont sinusoïdales et des pulsations oméga. On va modéliser le sol par un milieu semi infini. Qui va x est égal à zéro vers le bas. En X égal à zéro, on est à la surface de la Terre et puis on va vers les X positifs, puis on s'enfonce dans le sol. L'amplitude de la variation de la température à la surface de la Terre est supposée être égale à zéro et à la profondeur x cet état de x, et on suppose que la température moyenne temporelle du sol était zéro. Pour résoudre un tel problème. On passe par les notations complexes et on écrit la fonction de la température en notation complexe sous la forme de la somme de T0. Plus de x exponentielles de j oméga T. En partant de l'équation dite de la chaleur, on peut arriver à l'équation qui régit la variation de l'amplitude de la variation en profondeur qui s'écrit sous la forme de la dérivée de rapport avec ce carré est égal à un sur zéro oméga total de x.

Notes

Summary

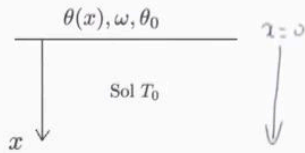


6m 17s

Milieu homogène, isotrope, ETL

μ : masse volumique

c : chaleur massique



$$T(x, t) = T_0 + \theta(x)e^{j\omega t}$$

- Régime périodique dans un demi-espace

Equation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} = \frac{1}{a} j\omega \theta(x)$$

Equation caractéristique: $r^2 = \frac{j\omega}{a}$

$$r_1 = (1 + j)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}; \quad r_2 = -(1 + j)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}$$

On pose $\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$

Thermodynamique

L'équation cartésienne de l'équation qu'on vient d'établir, c'est r carré est égal à j oméga sur un qui possède deux solutions R1 et R2 et on pose. Delta est égal à racine carrée de deux fois sur oméga.

Notes

Summary





- La solution de l'équation de la chaleur s'écrit alors

$$\theta(x) = \theta_1 e^{-\frac{(1+j)}{\delta} x} + \theta_2 e^{\frac{(1+j)}{\delta} x}$$

$$\theta_2 = 0 \text{ sinon } \theta(\infty) \rightarrow \infty$$

$$\text{D'où } \theta(x) = \theta_0 e^{-\frac{(1+j)}{\delta} x}$$

$$\text{et } T(x, t) = T_0 + \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})}$$

$$T(x, t) = T_0 + \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta})$$

- Phénomène de diffusion \rightarrow phénomène de propagation atténué.

Avec $\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$ la profondeur de pénétration.

- Solution: $a = 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

Variations journalières: $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rads}^{-1}$ $\delta = 14 \text{ cm}$

Variations annuelles: $\omega = 2,7 \cdot 10^{-7} \text{ rads}^{-1}$ $\delta = 2,7 \text{ m}$

Thermodynamique

La solution de l'équation qu'on vient d'établir va s'écrire sous la forme de la somme de deux termes en exponentielle de plus j sur delta pa x plus un terme en exponentielle de un plus j sur delta pa x. Bien sûr, il y a des constantes d'état. Un était à deux qu'on va chercher. À trouver les valeurs. Si on prend le cas particulier ou il tend vers l'infini. Dans ces cas là, θ de X va tendre vers l'infini, ce qui est impossible physiquement. Donc forcément la constante θ . Deux. Va être égal à zéro. Il nous reste à calculer. La constante était à un. Pour cela, on prend les conditions aux limites, c'est à dire X égal à zéro. L'amplitude de la variation, c'était à zéro point. Qui a finalement t il était fait sous la forme de la somme de T_0 plus petite à zéro exponentielle de j au mégaoctet X sur Delta. Bien sûr, à la température réelle, ça va être la partie réelle de cette fonction complexe. Donc finalement, la répartition spatio temporelle de la température dans le sol en fonction de l'excitation sinusoïdale imposée en X égale à zéro va s'écrire sous la forme de T_0 plus zéro exponentielle de moins x sur delta par cosinus oméga témoin et sur delta.

Notes

Summary



7m 54s



- La solution de l'équation de la chaleur s'écrit alors

$$\theta(x) = \theta_1 e^{-\frac{(1+j)}{\delta} x} + \theta_2 e^{\frac{(1+j)}{\delta} x}$$

$$\theta_2 = 0 \text{ sinon } \theta(\infty) \rightarrow \infty$$

$$\text{D'où } \theta(x) = \theta_0 e^{-\frac{(1+j)}{\delta} x}$$

$$\text{et } T(x, t) = T_0 + \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})}$$

$$T(x, t) = T_0 + \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta})$$

- Phénomène de diffusion \rightarrow phénomène de propagation atténué.

Avec $\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$ la profondeur de pénétration.

- Solution: $a = 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

Variations journalières: $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rads}^{-1}$ $\delta = 14 \text{ cm}$

Variations annuelles: $\omega = 2,7 \cdot 10^{-7} \text{ rads}^{-1}$ $\delta = 2,7 \text{ m}$

Thermodynamique

On voit tout de suite que dans ce cas particulier de la diffusion, on tend plutôt vers une propagation atténuée par le terme exponentiel d'au moins x . Sur δ , il y a une valeur particulière pour laquelle l'amplitude de la variation va être pratiquement nulle. C'est pour X est égal à Δ . Maintenant, on peut prendre un exemple particulier pour donner un ordre de grandeur, on prend un est égal à 7,5 et on calcule la profondeur de pénétration. Dans le premier cas ou la variation est compté sur une journée et dans ces cas là on trouve Δ est égal à de l'ordre de quatorze cm et on prend le deuxième cas, c'est à dire une variation de la température le long de l'année et dans ces cas là, on trouve un δ égal à 2,7 mètres. À partir de là, on peut comprendre pourquoi, pour conserver 120, on fait des cas qui sont toujours en moins à trois mètres de profondeur par rapport à la surface de la Terre. Donc, on vient de voir deux exemples qui traitent la conduction thermique en régime non stationnaire. Le premier, c'est la réponse à court terme d'un milieu qui subit une excitation thermique. Et le deuxième, c'est la réponse périodique d'un milieu également qui est excité, mais cette fois ci par un signal périodique.

Notes

Summary





- La solution de l'équation de la chaleur s'écrit alors

$$\underline{\theta}(x) = \theta_1 e^{\frac{-(1+j)}{\delta} x} + \theta_2 e^{\frac{(1+j)}{\delta} x}$$

$$\underline{\theta}_2 = 0 \text{ sinon } \underline{\theta}(\infty) \rightarrow \infty$$

$$\text{D'où } \underline{\theta}(x) = \theta_0 e^{\frac{-(1+j)}{\delta} x}$$

$$\text{et } \underline{T}(x, t) = T_0 + \theta_0 e^{\frac{-x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})}$$

$$T(x, t) = T_0 + \theta_0 e^{\frac{-x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta})$$

- Phénomène de diffusion \rightarrow phénomène de propagation atténué.

Avec $\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$ la profondeur de pénétration.

- Solution: $a = 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

Variations journalières: $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rads}^{-1}$ $\delta = 14 \text{ cm}$

Variations annuelles: $\omega = 2,7 \cdot 10^{-7} \text{ rads}^{-1}$ $\delta = 2,7 \text{ m}$

Thermodynamique

Je vous invite tous à aller voir la vidéo dans laquelle on traite l'application Ce qu'on vient de faire et dans une application d'ingénierie qui est le refroidissement des composants en électronique.

Notes

Summary

