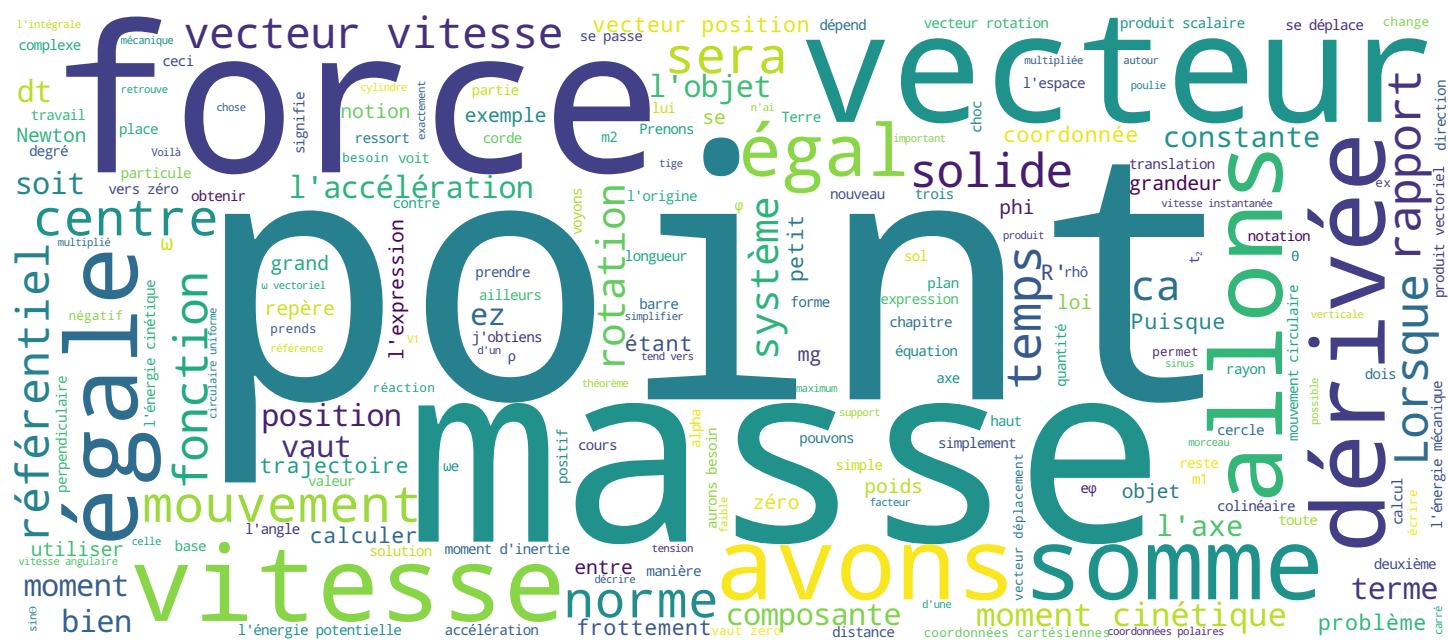


Position,  
vitesse,  
accélération,  
trajectoire

Prof. Cécile Hébert





Bonjour à tous. En mécanique, nous allons étudier le mouvement d'objets dans l'espace. Nous aurons besoin de systèmes de références pour pouvoir décrire, prédire, aussi communiquer à d'autres la façon dont ces objets se déplacent. Définir ces systèmes de références, c'est l'objet de la cinématique. Nous allons ici commencer par définir un certain nombre de termes et voir les notions de position, vitesse, accélération et trajectoire.

Notes

Summary



0m 05s

### Plan du cours

- I - Cinématique
- II - Référentiel accélérés
- III - Lois de Newton
- IV - Balistique – effet d'une force constante et uniforme
- V - Bilan des forces ; application des lois de Newton
- VI - Travail, Energie, principes de conservation
- VII - Chocs, systèmes de masse variable
- VIII - Oscillateur harmonique
- IX - Moment cinétique ; Gravitation
- X - Solide indéformable
- XI - Application du solide indéformable

2

Notes

Summary

0m 35s



## Table des matières

- 1 - Référentiel ; Repère
- 2 - Trajectoire, vitesse, accélération
- 3 - Coordonnées cartésiennes
- 4 - Coordonnées polaires
- 5 - Coordonnées curviligne
- 6 - Coordonnées cylindriques
- 7 - Coordonnées sphériques
- 8 - Mouvement circulaire en coordonnées cylindriques

3

Nous sommes dans le chapitre 1 sur la cinématique et nous allons voir les notions de référentiel, repère, trajectoire, vitesse, accélération.

Notes

Summary



0m 36s

Cinématique = *description des mouvements*. Nous aurons besoins de références pour décrire mathématiquement les mouvements.

**Référentiel** : système de référence par rapport auquel on mesure le mouvement



4

La cinématique, c'est la description des mouvements. Et nous aurons besoin de références pour décrire mathématiquement les mouvements. Par contre, nous allons juste les décrire. Nous ne serons pas encore capables de les prédire. Pour cela, il nous faudra les lois de Newton. Nous utiliserons les référentiels. C'est le système de référence par rapport auquel on mesure le mouvement. Par exemple, le référentiel du laboratoire ou bien un référentiel géocentrique avec l'origine au centre de la Terre ou un référentiel héliocentrique qui a son origine au centre du Soleil.

Notes

Summary



0m 47s



Cinématique = *description des mouvements*. Nous aurons besoins de références pour décrire mathématiquement les mouvements.

**Référentiel** : système de référence par rapport auquel on mesure le mouvement

**Origine du référentiel** : un point particulier *fixe* dans le référentiel par rapport auquel on définira la position d'un objet.

**Repère** : systèmes de vecteurs unitaires formant un trièdre orthonormé direct, par exemple  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  qui sert à décomposer mathématiquement le mouvement.

**Attention !!** le repère n'est pas forcément fixe dans le référentiel, et dans un même référentiel, on peut utiliser plusieurs repères.

**Coordonnées** : Ensemble des grandeurs qui permettent de repérer la position d'un point. Exemple : coordonnées cartésiennes ; coordonnées GPS...

4

Le choix du référentiel dépendra du problème qu'on souhaite étudier. Dans ce référentiel, nous choisirons une origine, l'origine du référentiel. C'est un point particulier fixe dans le référentiel et par rapport auquel on définira la position de l'objet. Pour décrire les mouvements, nous aurons besoin de repères. Ce sera des systèmes de vecteurs unitaires formant un trièdre orthonormé direct, par exemple,  $e_x, e_y, e_z$  en coordonnées cartésiennes, qui sert à décomposer mathématiquement le mouvement. Attention, le repère n'est pas forcément fixe dans le référentiel. Et dans un même référentiel, on peut utiliser plusieurs repères et jongler entre ces différents repères. Les coordonnées sont l'ensemble des grandeurs qui permettent de repérer la position d'un point. C'est les grandeurs que je dois vous donner pour que vous puissiez placer le point dans l'espace. Ces coordonnées sont liées aux repères. Par exemple, on aura les coordonnées cartésiennes dans un repère cartésien. On peut aussi utiliser sur Terre, par exemple, des coordonnées GPS.

Notes

Summary



1m 24s

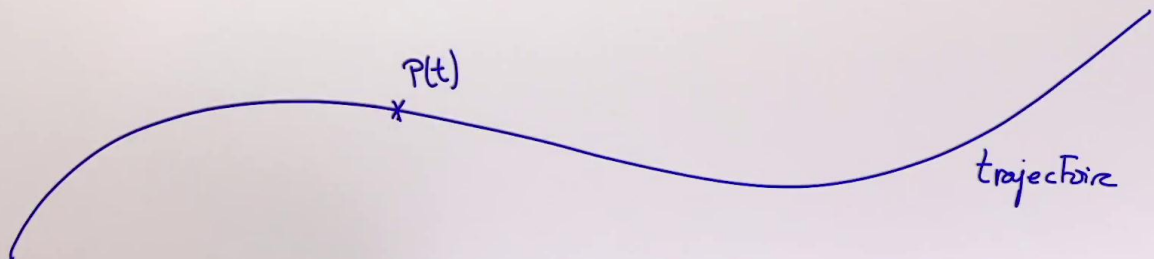
**I - 2 Trajectoire, vitesse, accélération**

Pour l'instant, l'objet étudié est considéré comme un *point matériel P*.

But : Décrire le mouvement de cet objet. Plus tard, prédire sa position.

Nous utiliserons pour ce faire sa position, sa vitesse et son accélération, mais aussi sa trajectoire.

**La trajectoire** est l'ensemble des points de l'espace par lesquels passe cet objet (point) au cours du temps.



5

Nous allons mettre en place les notions de trajectoire, vitesse et accélération. Pour l'instant, l'objet que nous étudions est un point matériel P. Le but est de décrire le mouvement de cet objet. Plus tard, on prédira sa position. Pour décrire ce mouvement, nous aurons besoin de la position, la vitesse et son accélération, ainsi que la notion de trajectoire. La trajectoire est l'ensemble des points de l'espace par lequel cet objet passe au cours du temps. On la matérialise par une ligne tracée dans l'espace et on repère la position de l'objet en fonction du temps. Qu'on appelle souvent  $p(t)$ .

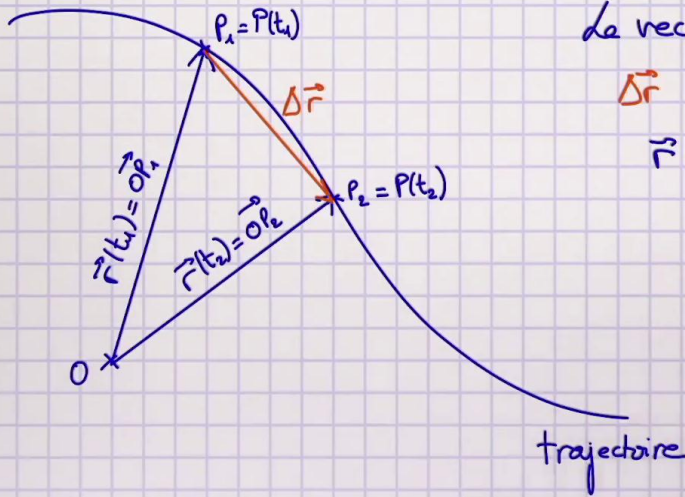
Notes

Summary



2m 37s

**La position** se mesure par rapport à l'origine fixe du référentiel (généralement  $O$ ). On repère ce point par un **vecteur position**  $\vec{r}(t) = \vec{OP}$ .



Le vecteur position dépend du temps.

$\Delta \vec{r}$  vecteur déplacement entre  $t_1$  et  $t_2$

$$\vec{r}(t_1) + \Delta \vec{r} = \vec{r}(t_2)$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{P_1P_2} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

vitesse moyenne entre  $t_2$  et  $t_1$

$$\vec{v}_{\text{moy}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

6

La position se mesurera par rapport à l'origine du référentiel. J'ai donc ici un référentiel et dans ce référentiel, je prends une origine  $O$ . Je schématise la trajectoire de l'objet. Je suppose qu'au temps  $t_1$ , l'objet est en  $P_1$ . Pour repérer la position de l'objet à  $t_1$ , je vais utiliser le vecteur  $OP_1$  que je pourrais appeler  $\vec{r}(t_1)$ . À l'instant  $t_2$ , mon objet sera en  $P_2$ . Le vecteur position sera  $\vec{r}(t_2)$ . Ce vecteur position  $\vec{r}(t) = \text{vecteur } OP$ , est donc un vecteur qui dépend du temps. Entre  $t_1$  et  $t_2$ , l'objet s'est déplacé de  $P_1$  à  $P_2$ . On appelle le vecteur  $P_1P_2$ , « vecteur déplacement ».  $\Delta \vec{r}$  est le vecteur déplacement entre  $T_1$  et  $T_2$ . Si je regarde ma loi d'addition des vecteurs,  $\vec{r}(t_1) + \Delta \vec{r} = \vec{r}(t_2)$ .  $\Delta \vec{r} = \text{vecteur } P_1P_2 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ . Entre  $t_2$  et  $t_1$ , il s'est écoulé le temps  $\Delta t = t_2 - t_1$ . La vitesse moyenne entre  $t_2$  et  $t_1$ ,  $V_{\text{moy}} = \Delta \vec{r} / \Delta t$ .

Notes

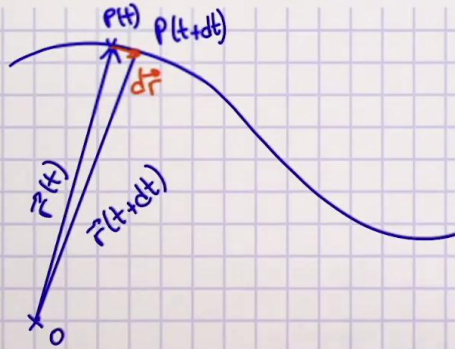
Summary



3m 21s



## Vitesse instantanée



$$\vec{v}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$d\vec{r} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)}{dt} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dérivée par} \\ \text{rapport au temps du} \\ \text{vecteur position.} \end{array} \right.$$

$\vec{v}(t)$  est colinéaire à  $d\vec{r}$

7

Maintenant, nous allons voir la notion de vitesse instantanée. Je considère mon objet qui à l'instant  $t$  est en  $p(t)$  avec le vecteur position  $r(t)$  qui vaut  $OP$ . Si je le place un temps plus tard en  $(t+dt)$ . J'ai le vecteur position  $r(t+dt)$ . L'objet étant  $P(t+dt)$ . Entre  $P(t)$  et  $P(t+dt)$ , j'ai le vecteur déplacement et je peux calculer la vitesse moyenne entre  $P(t)$  et  $P(t+dt)$ . Ce que je vais faire maintenant, c'est raccourcir l'intervalle de temps «  $dt$  ». Cela revient à faire tendre «  $dt$  » vers zéro. Et dans ce cas-là, je rapproche le point  $P(t+dt)$  du point  $P$ . Je diminue le vecteur déplacement et je diminue en même temps l'intervalle de temps «  $dt$  ». Le vecteur devient un vecteur infinitésimal «  $dr$  ». L'intervalle temps «  $dt$  » devient lui aussi infinitésimal. La vitesse instantanée  $v(t)$ , est la limite quand «  $dt$  » tend vers zéro. De  $dr/dt$ . «  $dr$  » est le vecteur déplacement. C'est toujours  $r(t+dt) - r(t)$ . Donc la vitesse instantanée  $v(t)$  est la limite quand «  $dt$  » tend vers zéro de  $r(t+dt) - r(t)/dt$ . Ça n'est rien d'autre que la dérivée par rapport au temps du vecteur position. De plus, le vecteur  $v(t)$  est collinéaire «  $dr$  ». Lorsque «  $dt$  » devient tout petit, «  $dr$  » devient tout petit et se rapproche de la trajectoire.

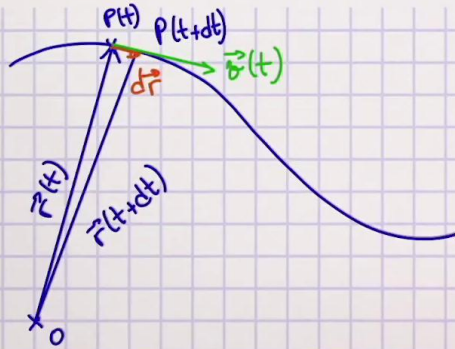
Notes

Summary



4m 59s

## Vitesse instantanée



$$\vec{v}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$d\vec{r} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)}{dt} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dérivée par} \\ \text{rapport au temps du} \\ \text{vecteur position.} \end{array} \right.$$

$\vec{v}(t)$  est colinéaire à  $d\vec{r}$

le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire

Notation : "dérivée par rapport au temps" = "point"  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

7

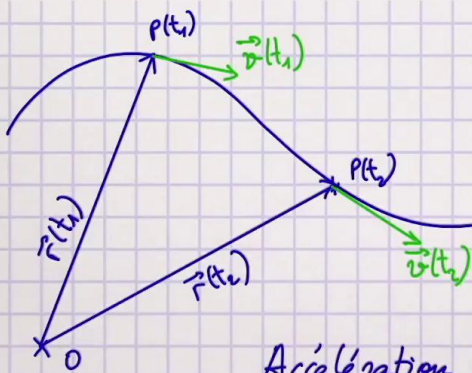
«  $d\vec{r}$  » est tangent à la trajectoire, donc le vecteur vitesse tangent à la trajectoire. «  $d\vec{r}$  » devient petit, «  $dt$  » tout petit, «  $v$  » peut avoir une norme finie. Nous représentons vecteur vitesse partant du point P et tangent à la trajectoire. C'est le vecteur vitesse instantanée. Afin de simplifier cette notation de la dérivée, nous allons utiliser la notation avec un point. Nous écrivons donc  $V$  égale  $R$  point. Ce «  $R$  point » signifie : dérivée du vecteur  $R$  par rapport temps.

Notes

Summary



## Accélération instantanée



$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\vec{a}_{\text{moy}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Accélération instantanée

$$\vec{a} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt}$$

Le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \quad \text{"r - deux - points"}$$

8

L'accélération correspond à un changement du vecteur vitesse. De la même manière, nous allons avoir une accélération moyenne et une accélération instantanée. Si mon objet a une vitesse  $V(t_1)$  en  $P(t_1)$  et  $V(t_2)$  en  $P(t_2)$ , entre  $t_1$  et  $t_2$ , nous avons une variation du vecteur vitesse  $\Delta V = V(t_2) - V(t_1)$ . L'intervalle de temps reste  $\Delta t = t_2 - t_1$ . L'accélération moyenne est par définition :  $\Delta v / \Delta t$ . Pour obtenir l'accélération instantanée, de la même manière que pour la vitesse instantanée, je dois calculer l'accélération moyenne entre un instant « t » et un instant « t+dt » très proches et faire tendre « dt » vers zéro. « a » est la limite quand « dt » tend vers zéro de  $V(t+dt) - V(t)/dt$ . Le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse :  $a(t) = dv/dt$ . Ce que nous pourrions aussi noter « V point ». Par ailleurs, le vecteur vitesse étant la dérivée du vecteur position, nous pouvons aussi dire que l'accélération est la dérivée seconde du vecteur position. Ce qui pourra s'écrire  $d^2r/dt^2$ . En notation avec les points, cela donnera « r deux points ».

Notes

Summary



## Résumé :

position :  $\vec{r}(t) = \vec{OP}$

vitesse :  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

accélération :  $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$

La vitesse *scalaire* est la norme du vecteur vitesse,  $v = |\vec{v}|$

L'accélération *scalaire* est la norme du vecteur accélération  $a = |\vec{a}|$

9

En résumé, si O est l'origine dans mon référentiel, le vecteur position est  $\vec{r}(t)$  égale vecteur OP. La vitesse est la dérivée du vecteur position qui se note « r point ». L'accélération, la dérivée du vecteur vitesse qui se note « v point » ou bien « r deux points ». La vitesse scalaire est la norme du vecteur vitesse. On le notera souvent « v sans flèche », qui est la norme du vecteur vitesse. L'accélération scalaire est la norme du vecteur accélération.

Notes

Summary

10m 01s



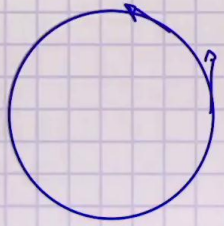


**Attention!**

$\vec{v}$   
 $\downarrow$   
 $|\vec{v}|$   
 $\downarrow$   
 $\frac{d|\vec{v}|}{dt}$   
*dérivée de la norme du vecteur vitesse*

$\rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|$   
*norme de la dérivée du vecteur vitesse*

$\neq$   
*Ces deux grandeurs sont différentes*



10

Là, il y a quelque chose à quoi il faut faire très attention. Reprenons notre vecteur vitesse. Je peux calculer sa dérivée :  $d\vec{v}/dt$ . La dérivée du vecteur vitesse, et je peux calculer la norme de la dérivée du vecteur vitesse. Je peux aussi prendre d'abord sa norme. Norme de  $\vec{v}$ , et calculer la dérivée de cette norme. c'est la dérivée de la norme du vecteur vitesse. Ces deux grandeurs-là ne sont pas la même chose ! Elles sont différentes. Prenez par exemple un mouvement circulaire uniforme. L'objet se déplace à vitesse constante sur un cercle. Qu'est-ce que cela signifie ? Cela signifie que la norme du vecteur vitesse est constante. Mais entre deux points, le vecteur vitesse a tourné. Sa direction n'est pas la même. Donc le vecteur vitesse, lui, a changé. Puisque le vecteur vitesse a changé, sa dérivée est non nulle dans un mouvement circulaire uniforme. Mais par contre, sa norme est constante. Donc la dérivée de la norme vaut zéro. Et on voit bien que la dérivée de la norme n'est pas égale à la norme de la dérivée.

Notes

Summary





Pour pouvoir continuer, il faut maintenant faire le choix du système de coordonnées. Pour chaque système de coordonnées, un repère permet d'obtenir les composantes des vecteurs. Nous utiliserons uniquement des systèmes de coordonnées qui sont liés à un repère orthonormé direct.

Dans le cours (et dans la suite des études) :

- coordonnées cartésiennes
- coordonnées polaires
- coordonnées curvilignes (repère de Frenet)
- coordonnées cylindriques
- coordonnées sphériques

11

Maintenant, pour pouvoir continuer, il va falloir faire le choix du système de coordonnées que nous utiliserons. Cela nous permettra, avec un repère, d'obtenir les composantes des vecteurs et donc de faire des calculs avec. Nous utiliserons uniquement des systèmes de coordonnées liés à des repères orthonormés direct. Et dans Dans le cours, nous verrons les coordonnées cartésiennes, polaires, curvilignes ou repère de Frenet, cylindriques et sphériques. Tout ceci sont des outils dont nous aurons besoin pour la mécanique.

Notes

Summary

11m 59s





Voilà, nous avons vu les définitions : position, vitesse, accélération, trajectoire et le lien mathématique entre ces grandeurs. Dans les prochaines vidéos, je vais vous introduire successivement tous les systèmes de coordonnées que nous allons utiliser dans ce cours.

Notes

Summary

12m 31s

