

Application: Barre qui pivote

Partie 1

Prof. Cécile Hébert



Video





Bonjour. Dans cette vidéo, nous allons voir un exemple d'application des notions de mécanique du solide vue précédemment. Nous allons nous intéresser à un cas particulier, un solide qui pivote autour d'un point fixe. Il s'agit d'une barre accrochée à un pivot et qu'on va laisser tourner autour de ce pivot. Nous allons voir cet exemple vraiment en détail. Je vais en profiter pour traiter ce problème avec deux paramètres en parallèle. Ceci devrait vous aider à comprendre comment fait un choix de paramètre en fonction d'un problème.

Notes

Summary



0m 05s

Plan du cours

- I - Cinématique
- II - Référentiel accélérés
- III - Lois de Newton
- IV - Balistique – effet d'une force constante et uniforme
- V - Forces ; application des lois de Newton
- VI - Travail, Energie, principes de conservation
- VII - Chocs, systèmes de masse variable
- VIII - Oscillateur harmonique
- IX - Moment cinétique ; Gravitation
- X - Solide indéformable
- XI - Application du solide indéformable

2

Nous sommes dans le chapitre 11 sur l'application du solide indéformable.

Notes

Summary



0m 42s

Table des matières

XI-1. Chute d'une barre et pendule physique

XI-2. Mouvement gyroscopique

3

Et nous allons voir le cas de la chute d'une barre et en même temps du pendule physique.

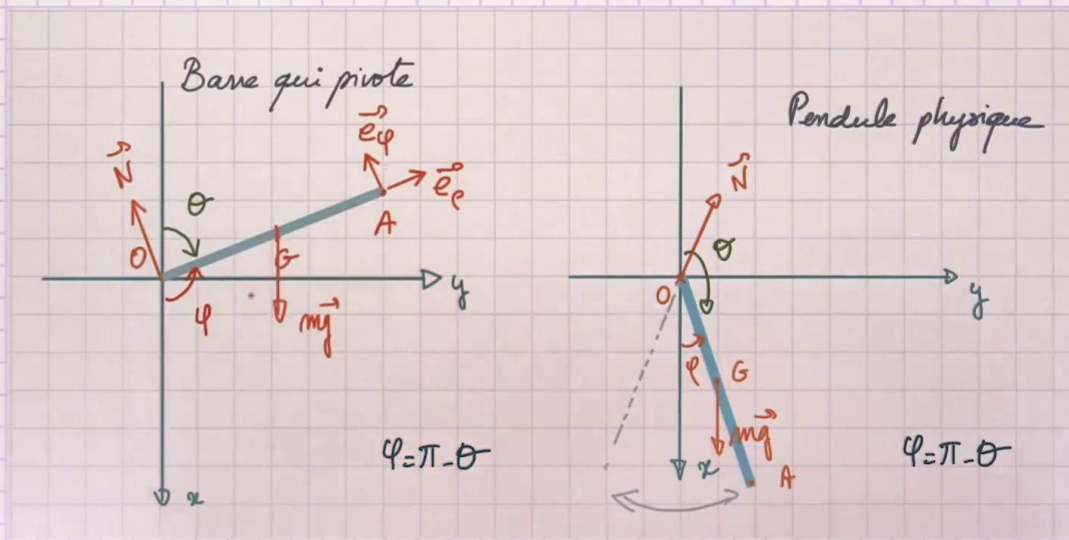
Notes

Summary



0m 47s

Barre homogène de masse m et de longueur l pivotant autour de O , point fixe.



4

Vous allez voir pourquoi nous allons traiter ces deux problèmes en même temps. Nous prenons une barre homogène, de masse m et deux longueurs l , pivotant autour de O , qui est un point fixe. Nous avons deux possibilités pour imaginer ce problème. Nous pouvons penser à la cheminée qui tombe ou à une barre qui tombe, fixée par un point O , qui part d'un certain angle, et qui chute jusqu'à l'horizontale qui est le sol. L'objet s'arrêtera donc évidemment au sol. Mais prenons le cas d'une barre qui pivote autour d'un point O , et qui finalement ne rencontre jamais le sol. Que se passe-t-il ? Nous allons avoir un oscillateur. C'est ce que l'on appelle un pendule physique. C'est un objet accroché à un point fixe qui va se mettre à osciller autour d'une position d'équilibre. Simplement pour décrire cet objet, je ne pourrais pas faire l'approximation du point matériel. Je serai obligée de le considérer comme un solide. Dans les deux cas, les forces qui s'exercent sur l'objet sont : la réaction exercée au point contact avec le pivot et le poids exercé au centre de masse. Pour traiter la barre qui pivote, le paramètre le plus adapté est l'angle θ mesuré depuis la verticale.

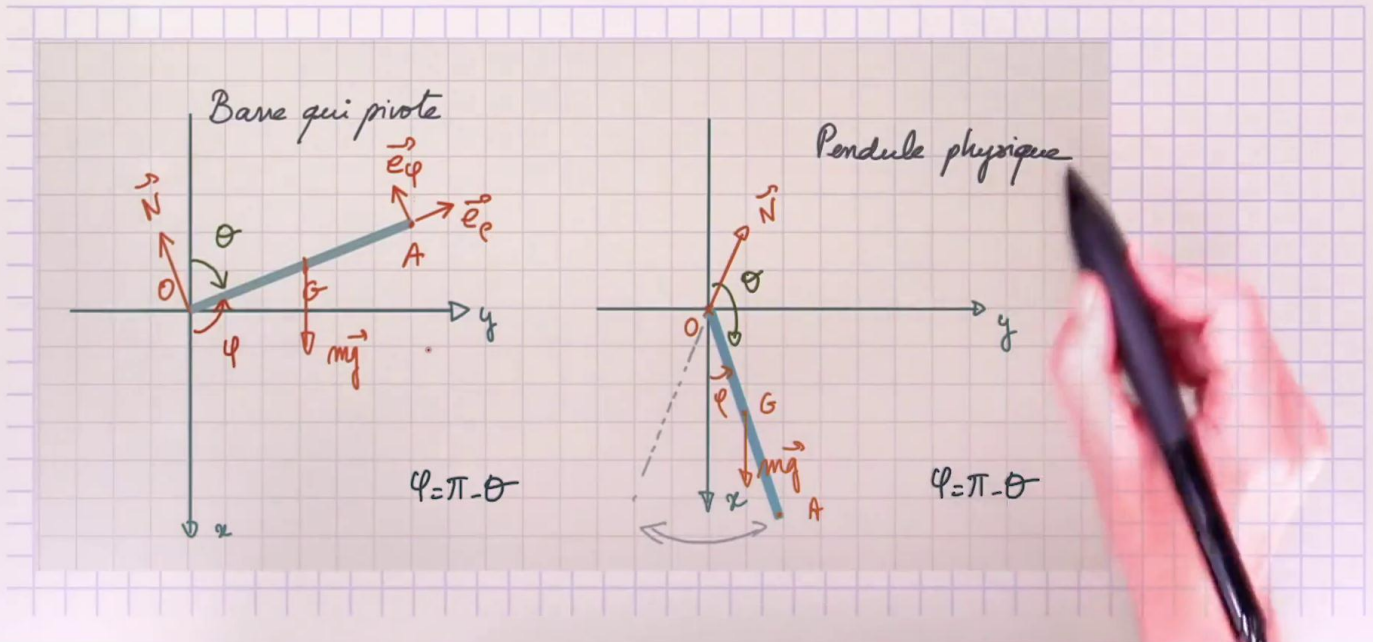
Notes

Summary



0m 53s

Barre homogène de masse m et de longueur l pivotant autour de O , point fixe.



4

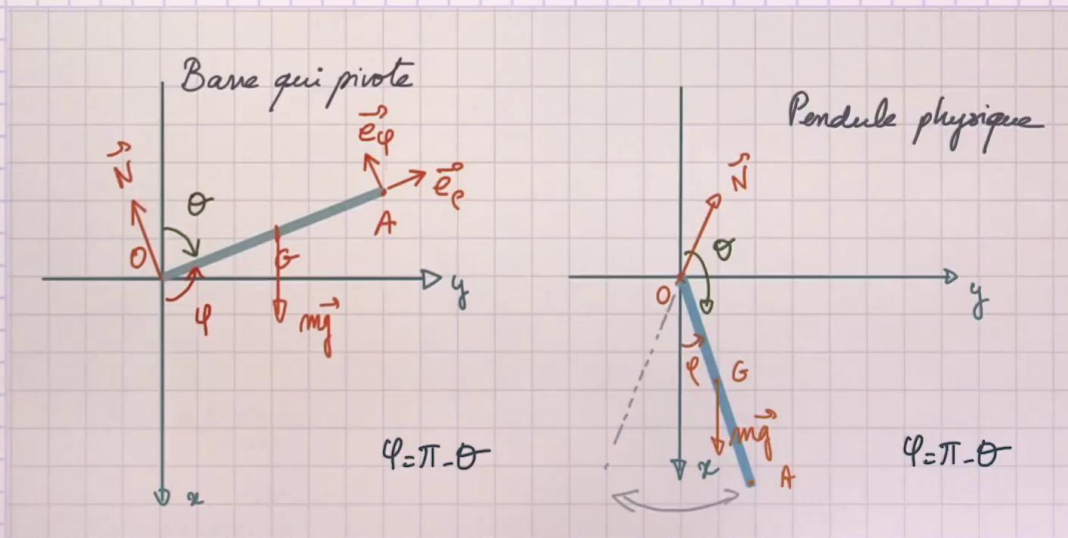
Pour analyser le pendule physique, l'angle le plus adapté est l'angle φ qui serait mesuré ici aussi depuis la verticale, mais pour un axe orienté vers le bas. Une des grandes difficultés de ces problèmes de physique est toujours de décider quels paramètres prendre pour le modéliser. Apprendre à choisir le bon paramètre est une question d'expérience. À l'aide de cet exemple et en traitant ces deux cas en parallèle, je vais vous montrer pourquoi dans un cas, il est mieux d'utiliser θ et dans l'autre cas, il est mieux d'utiliser φ . On peut faire une approche intuitive. Si nous pensons au mouvement de l'objet lorsque c'est la barre qui s'arrête au sol, il est lâché depuis une certaine hauteur avec un angle donné et au cours du temps, la barre va accélérer et finir par s'arrêter au sol. En prenant l'angle θ , θ est une fonction croissante du temps. Le fait que la barre s'arrête au sol, m'évite de voir l'angle θ passé à 180 degrés, arriver à 360 et osciller entre zéro et 360. Je m'arrête de toute façon à 90 degrés. Lorsque nous nous intéressons au pendule physique, nous écartons la barre de sa position d'équilibre et nous la regardons osciller.

Notes

Summary



Barre homogène de masse m et de longueur l pivotant autour de O , point fixe.



θ : entre 0 et 2π
 φ : entre $-\pi$ et π
 $\varphi = \pi - \theta$
 φ : angle des coord. cylindriques
 \vec{e}_r et \vec{e}_φ coord cylindriques

4

Cette oscillation se fait autour d'une position d'équilibre, et il est mieux d'avoir la coordonnée qui modélise le problème égale à zéro lorsque l'objet est à la position d'équilibre. Or θ vaut 180 degrés. L'angle φ est donc bien adapté, car il est à zéro lorsque la barre passe par la position d'équilibre et nous verrons une barre qui oscille entre moins φ_0 et plus φ_0 . Il n'en reste pas moins que physiquement, ces deux problèmes sont les mêmes. Et nous avons un lien entre l'angle φ et l'angle θ . φ est égal à π moins θ . Résumons, l'angle θ varie entre zéro et 2π . L'angle φ entre moins π et π . Le lien entre les deux est que φ est égal à π moins θ . L'angle φ entre l'axe Ox et la direction de la barre, et l'angle des coordonnées cylindriques. On peut donc lier à cet angle φ , les vecteurs unitaires \vec{e}_r et \vec{e}_φ des coordonnées cylindriques. Nous allons maintenant chercher à déterminer l'équation du mouvement de la barre, d'une part avec l'angle θ et d'autre part avec l'angle φ et nous ferons le lien entre les deux.

Notes

Summary



Mouvement: avec θ

avec φ

Forces: réaction du pivot \vec{N} et poids $m\vec{g}$

Pivot: O un point fixe du référentiel (Oz) axe principal d'inertie

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OO} \wedge \vec{N} + \vec{OG} \wedge m\vec{g} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OG} \wedge m\vec{g}$$

5

Quelques considérations sont valables dans les deux cas. Les forces sont la réaction du pivot N et le poids mg . Le pivot O est un point fixe du référentiel. Oz est un axe principal d'inertie. Je vais donc pouvoir écrire le théorème du moment cinétique somme des moments des forces par rapport à O est égal à dL_O/dt . La somme des moments des forces sera égal à OO vectoriel N moment de la réaction plus OG vectorielle mg . OO vectoriel N vaut zéro. Il ne me reste donc que OG vectoriel mg . J'ai donc dL_O/dt égale OG vectoriel mg . Cette écriture n'utilise pas encore l'angle θ ou l'angle φ . Elle est donc générale et valable dans les deux cas. Ce que je vais faire maintenant, c'est exprimer L_O , OG et mg , soit ensuite le produit vectoriel OG vectoriel mg d'une part avec θ et d'autre part avec φ .

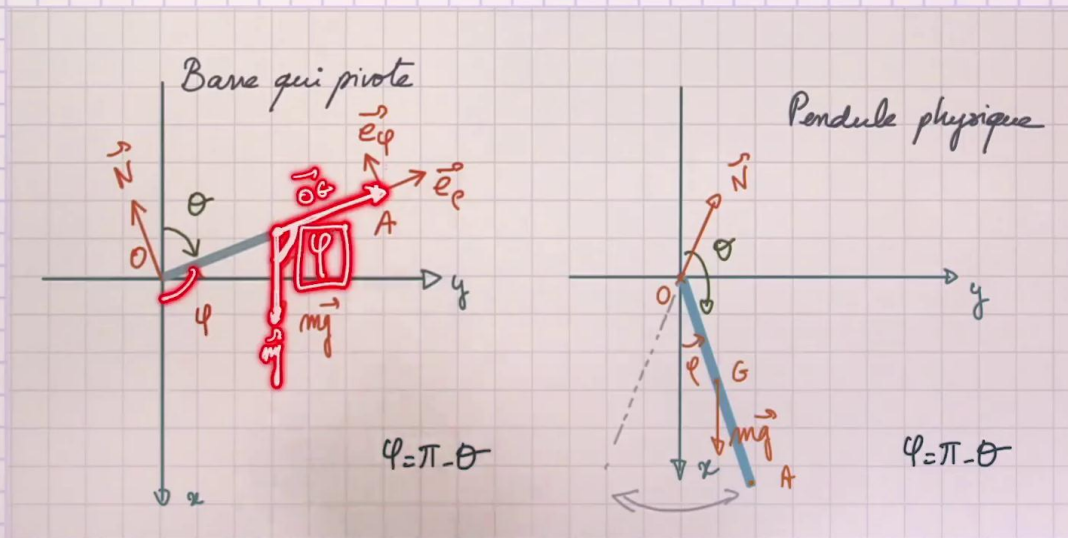
Notes

Summary



5m 32s

Barre homogène de masse m et de longueur l pivotant autour de O , point fixe.



θ : entre 0 et 2π
 φ : entre $-\pi$ et π
 $\varphi = \pi - \theta$
 φ : angle des coord. cylindriques
 \vec{e}_r et \vec{e}_φ coord. cylindriques

4

Reprenons le schéma précédent. Je veux donc calculer \vec{OG} produit vectoriel \vec{mg} . Si je redessine \vec{OG} partant du centre de masse G , j'ai \vec{GO} produit vectoriel \vec{mg} . On remarque entre ces deux vecteurs la présence de l'angle φ . La norme du produit vectoriel sera donc norme de \vec{OG} , norme de \vec{mg} sinus de l'angle φ .

Notes

Summary



7m 01s

Mouvement: avec Θ

avec φ

Forces: réaction du pivot \vec{N} et poids $m\vec{g}$

Pivot: O un point fixe du référentiel (O_3) axe principal d'inertie

$$\Sigma \vec{\mathcal{L}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OO} \wedge \vec{N}_O + \vec{OG} \wedge m\vec{g} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OG} \wedge m\vec{g}$$

$$\vec{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{l}{2} mg \sin \varphi$$

5

J'ai parlé de l'angle φ , je me place donc du côté de la modélisation avec φ la norme de OG est $l/2$, la norme de mg est mg et le sinus de l'angle φ . Et il me manque le vecteur.

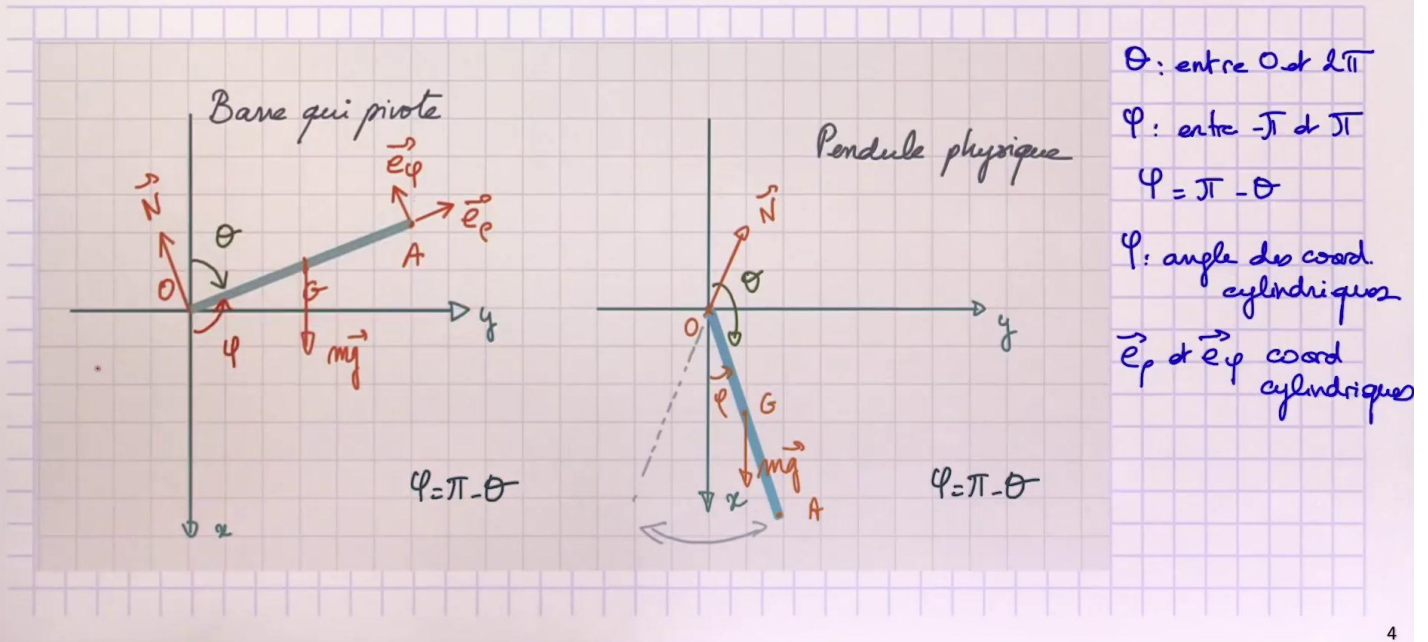
Notes

Summary



7m 40s

Barre homogène de masse m et de longueur l pivotant autour de O , point fixe.



4

Reprenons le schéma. \vec{OG} vectoriel $m\vec{g}$. Si je prends la règle des trois doigts de la main droite \vec{OG} , $m\vec{g}$, j'obtiens un vecteur qui pointe vers l'intérieur de la feuille. Le résultat est donc un vecteur pointant dans la feuille. Or, si j'ai x, y comme sur le schéma, le vecteur \vec{e}_z lui pointe vers l'extérieur de la feuille. Le produit vectoriel \vec{OG} vectoriel $m\vec{g}$ est donc selon moins \vec{e}_z .

Notes

Summary



7m 59s

Mouvement: avec θ

 avec φ

 Forces: réaction du pivot \vec{N} et poids $m\vec{g}$

 Pivot: O un point fixe du référentiel (O_3) axe principal d'inertie

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OO} \wedge \vec{N}_O + \vec{OG} \wedge m\vec{g} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OG} \wedge m\vec{g} \quad \vec{L}_O = I_O \vec{\omega}$$

$$\vec{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{lmg}{2} \sin(\pi - \theta) (-\vec{e}_3) = -\frac{lmg}{2} \sin\theta \vec{e}_3 \quad \vec{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{l}{2} mg \sin\varphi (-\vec{e}_3) = -\frac{lmg}{2} \sin\varphi \vec{e}_3$$

5

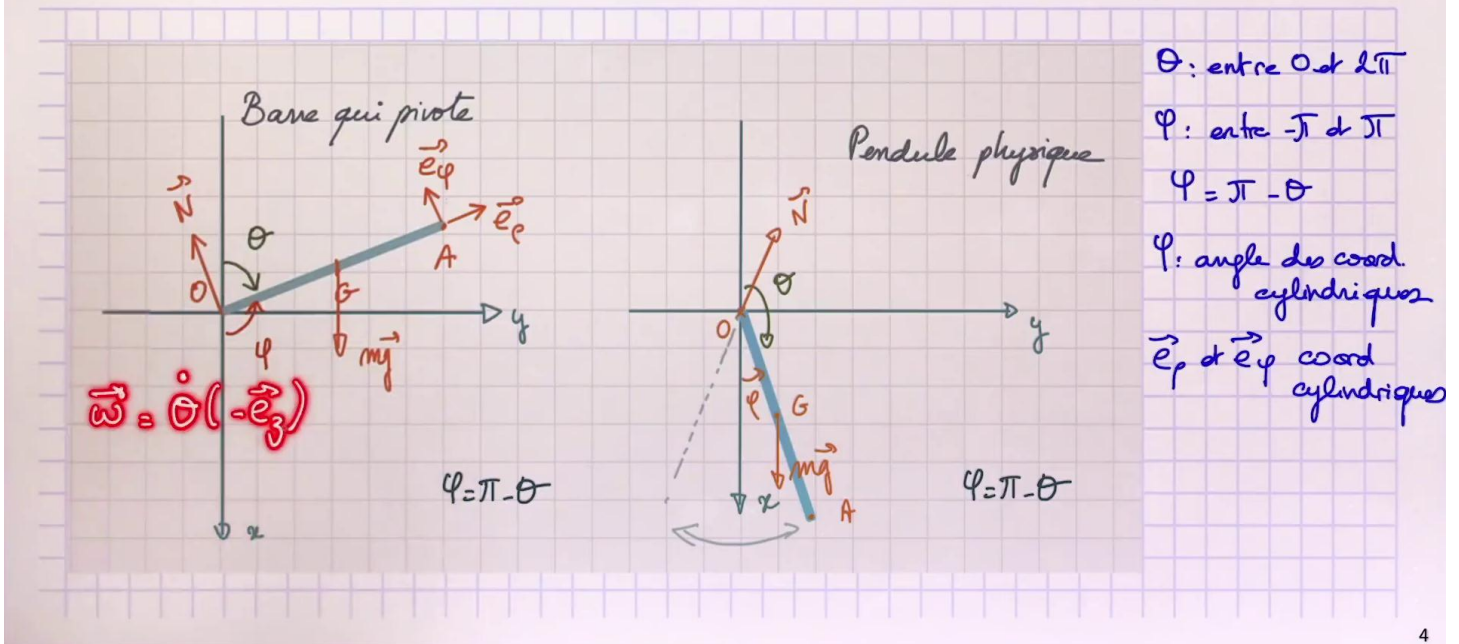
J'ai donc exprimé vectoriellement OG vectoriel mg. L'expression à l'aide de θ se fera simplement en utilisant la formule précédente, soit OG vectoriel mg égale $lmg/2 \cdot \sin(\varphi)$. Or φ est égal à π moins θ moins ez . Le sinus de π moins θ est égal au sinus de θ . Je trouve donc moins $lmg/2 \cdot \sin\theta \, ez$. J'ai donc exprimé OG vectoriel mg une fois avec θ et une fois avec φ . Plus simplement, c'est aussi moins $lmg/2 \cdot \sin(\varphi) \, ez$. La deuxième quantité à exprimer est maintenant dL_O/dt . Je dois donc commencer par exprimer le moment cinétique L_O . Dans les deux cas, L_O peut s'écrire : $I_O \omega$ vecteur rotation ω . À nouveau cette écriture est générale, mais je vais exprimer ω une fois avec φ et une fois avec θ .

Notes

Summary



Barre homogène de masse m et de longueur l pivotant autour de O , point fixe.



4

L'expression avec θ peut se faire par un argument géométrique. La rotation se fait autour de l'axe ez avec la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ point. Puisque la rotation se fait autour de ez , le vecteur rotation sera colinéaire à ez . La norme de la vitesse angulaire sera $\dot{\theta}$ point. Il nous faut maintenant le sens du vecteur rotation. Lorsque θ augmente, le vecteur rotation pointe vers l'intérieur de la feuille. Nous aurons donc un vecteur rotation $\vec{\omega}$ qui sera égal vectoriellement à $\dot{\theta}$ point et moins ez puisque le vecteur ez pointe lui vers l'extérieur de la feuille.

Notes

Summary



Mouvement: avec θ

avec φ

Forces: réaction du pivot \vec{N} et poids $m\vec{g}$

Pivot: O un point fixe du référentiel (O_3) axe principal d'inertie

$$\Sigma \vec{\mathcal{L}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OO} \wedge \vec{N}_O + \vec{OG} \wedge m\vec{g} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OG} \wedge m\vec{g} \quad \vec{L}_O = I_G \vec{\omega}$$

$$\vec{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{lm}{2} g \sin(\pi - \theta) (-\vec{e}_3) = -\frac{lm}{2} g \sin \theta \vec{e}_3 \quad \vec{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{l}{2} m g \sin \varphi (-\vec{e}_3) = -\frac{lm}{2} g \sin \varphi \vec{e}_3$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta} \vec{e}_3$$

5

De manière géométrique, nous pouvons donc écrire ω est égal à moins θ point ez. L'expression du vecteur ω à l'aide de φ peut se faire de manière plus automatique.

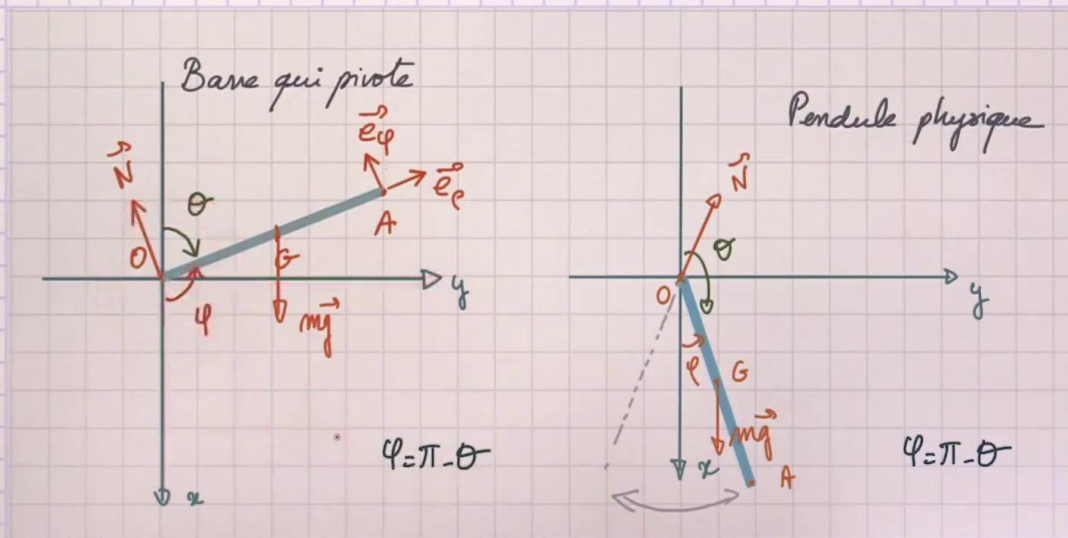
Notes

Summary

11m 01s



Barre homogène de masse m et de longueur l pivotant autour de O , point fixe.



θ : entre 0 et 2π
 φ : entre $-\pi$ et π
 $\varphi = \pi - \theta$
 φ : angle des coord. cylindriques
 \vec{e}_r et \vec{e}_φ coord cylindriques

4

Nous utilisons les coordonnées cylindriques ou polaires. La rotation est caractérisée par l'angle φ avec une vitesse de rotation $\dot{\varphi}$ point. Pour cette vitesse de rotation $\dot{\varphi}$ point, le vecteur rotation est tout simplement ω est égal à $\dot{\varphi}$ point \vec{e}_z .

Notes

Summary



Mouvement: avec θ

 avec φ

 Forces: réaction du pivot \vec{N} et poids $m\vec{g}$

 Pivot: O un point fixe du référentiel (O_3) axe principal d'inertie

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{O}\vec{O} \wedge \vec{N} + \vec{O}\vec{G} \wedge m\vec{g} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{O}\vec{G} \wedge m\vec{g} \quad \underline{\vec{L}_O = I_O \vec{\omega}}$$

$$\vec{O}\vec{G} \wedge m\vec{g} = \frac{lm}{2} \sin(\pi - \theta) (-\vec{e}_3) = -\frac{lm}{2} \sin \theta \vec{e}_3 \quad \left. \begin{array}{l} \vec{O}\vec{G} \wedge m\vec{g} = \frac{l}{2} mg \sin \varphi (-\vec{e}_3) \\ = -\frac{lm}{2} g \sin \varphi \vec{e}_3 \end{array} \right\}$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta} \vec{e}_3$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_3 ; \varphi = \pi - \theta \Rightarrow \dot{\varphi} = -\dot{\theta}$$

$$I_{O_3} = I_{G_3} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = I_{O_3} = \frac{1}{3} ml^2$$

5

Cette fois, nous avons une différence, un moins pour l'expression avec θ point un plus pour l'expression avec φ point. Nous allons vérifier que c'est cohérent. Nous avons dit que φ est égal à π moins θ , donc par dérivation, cette expression φ point est égal à la dérivée de π qui vaut zéro moins la dérivée de θ qui vaut moins θ point. Donc φ point est égal à moins θ point. Je peux donc remplacer φ point par moins θ point et j'obtiens ω est égal à moins θ point ez. Ce qui est cohérent avec l'expression trouver directement. Physiquement, ces deux vecteurs rotation sont donc bien le même vecteur qui pointe vers l'intérieur de la feuille. L'un exprimé avec θ point, l'autre exprimé avec φ point. Le calcul du moment d'inertie I_{Oz} ne dépend pas de θ . Il sera valable dans les deux cas. I_{Oz} s'obtient à l'aide du théorème de Steiner comme étant I_{Gz} plus m la distance OG au carré, soit $l/2$ au carré. Le moment d'inertie d'une barre par rapport à son centre de masse est de $1/12^e$ de ml^2 . Et donc $1/12^e$ de ml^2 plus $1/4$ de ml^2 . Ceci me donne I_{Oz} est égal à $1/3$ de ml^2 . Ce calcul est valable dans les deux cas. Je vais maintenant écrire L_O égal $I_{Oz} \omega$. Calculer dL_O/dt et utiliser l'expression de ω , soit avec θ , soit avec φ .

Notes

Summary



Mouvement: avec θ

 avec φ

 Forces: réaction du pivot \vec{N} et poids $m\vec{g}$

 Pivot: O un point fixe du référentiel (O_3) axe principal d'inertie

$$\Sigma \vec{\mathcal{L}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OO} \wedge \vec{N} + \vec{OG} \wedge m\vec{g} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OG} \wedge m\vec{g} \quad \vec{L}_O = I_O \vec{\omega}$$

$$\vec{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{lm}{2} g \sin(\pi - \theta) (-\vec{e}_3) = -\frac{lm}{2} g \sin \theta \vec{e}_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{l}{2} m g \sin \varphi (-\vec{e}_3) \\ = -\frac{lm}{2} g \sin \varphi \vec{e}_3 \end{array} \right.$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta} \vec{e}_3$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_3 ; \varphi = \pi - \theta \Rightarrow \dot{\varphi} = -\dot{\theta}$$

$$I_{O_3} = I_{C_3} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = I_{O_3} = \frac{1}{3} ml^2$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{1}{3} ml^2 (-\ddot{\theta}) \vec{e}_3 = -\frac{mlg}{2} \sin \theta \vec{e}_3$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} \vec{e}_3 = -\frac{mlg}{2} \sin \varphi \vec{e}_3$$

$$\ddot{\theta} - \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

5

J'obtiens donc ici $dL_O/dt = 1/3$ de ml^2 dérivée de ω , c'est moins θ deux points ez. Ceci doit être égal à la somme des moments des forces, soit moins $mlg/2 \sin \theta$ ez. En simplifiant par m une fois par l , en passant sur $1/3$ de l'autre côté et ce terme-là du même côté du égal, nous obtenons θ deux points $-3/2$ de $g/l \sin \theta$ égal zéro. En faisant la même chose avec φ , nous obtenons $dL_O/dt = 1/3 ml^2 \varphi$ deux points, ez cette fois, je n'ai pas dit moins, est égal à moins $mlg/2 \sin(\varphi)$ ez. À nouveau, je simplifie par m , je simplifie un m , je projette sur ez et je passe tous les termes du même côté. Nous obtenons alors φ deux points plus $3/2$ de $g/l \sin(\varphi) = 0$. Nous avons donc deux équations différentielles qui sont similaires. J'ai le même pré-facteur ici. J'ai un θ deux points, un φ deux points, un sinus θ , un sinus φ , mais une différence de signe.

Notes

Summary



$$\ddot{\theta} - \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0$$

pendule pesant: si $\varphi \ll 1$

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \varphi = 0$$

$\underbrace{\quad}_{\omega_0^2}$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

oscillateur harmonique
pulsation propre est ω_0

6

Reprenons ces deux équations différentielles. Refaisons un schéma de la situation. Lorsque nous sommes dans le cas de la barre qui part de l'angle zéro. Et que nous lâchons et qu'il pivote, nous ne pouvons pas faire l'approximation des petits angles, à aucun moment. Même si la barre s'arrête au sol, l'angle final θ est de 90 degrés, $\pi/2$, ça ne peut pas être considéré comme un petit angle. Lorsque nous sommes dans le cas de la barre qui oscille autour de sa position d'équilibre, nous avons l'angle φ qui paramétrise le problème et nous pouvons faire des petites oscillations. Si nous avons le cas du pendule pesant, si l'angle φ est très inférieur à 1, nous pouvons écrire $\sin \varphi$ à peu près égale à φ et à ce moment-là, obtenir l'équation différentielle φ deux points plus $3/2 * g/\ell \varphi = 0$. Nous pouvons appeler cette grandeur-là ω_0^2 et obtenir l'équation différentielle φ deux points plus $\omega_0^2 \varphi = 0$. C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. La pulsation propre est ω_0 . Il serait possible d'arriver à l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique en faisant l'approximation des petits angles et en utilisant l'angle θ .

Notes

Summary

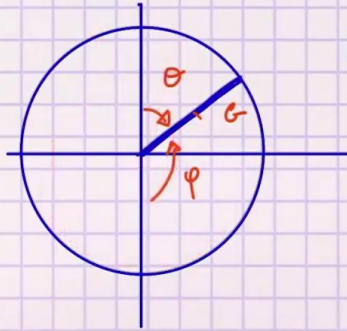
15m 50s



$$\ddot{\theta} - \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Ici: petites oscillations
autour de $\theta = \pi$

$\sin \theta$ au voisinage de π



$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

pendule pesant: si $\varphi \ll 1$

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \varphi = 0$$

$\underbrace{\frac{3}{2} \frac{g}{l}}_{\omega_0^2} \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$
oscillateur harmonique
pulsation propre est ω_0

6

Simplement dans ce cas-là, les petites oscillations ne se font pas autour de θ égal à zéro, mais autour de θ égal pi. Il faudrait faire le développement limité de la fonction sinus θ au voisinage de pi. En analyse, vous verrez le développement limité de fonctions au voisinage d'un point x zéro autre que zéro. Mais c'est vrai qu'en physique en général, lorsqu'on fait les approximations et qu'on cherche à faire un développement limité, on se place volontiers autour de zéro. On a donc pour le pendule choisi exprès une paramétrisation qui nous permettrait directement d'arriver à ce cas. En revanche, l'avantage de cette paramétrisation avec θ et pour l'analyse de la barre qui tombe, qu'elle nous permet de regarder θ comme une fonction croissante du temps. Par ailleurs, dès que nous partons d'une position relativement verticale, même avec φ , nous ne pouvons pas faire l'approximation des petits angles. Nous avons donc dans les deux cas, si la barre part d'une position verticale, même si elle oscille comme un pendule, une équation différentielle qui n'est pas l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. Cette équation différentielle qu'elle s'écrive sur φ ou sur θ .

Notes

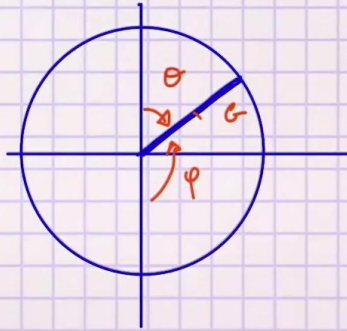
Summary



$$\ddot{\theta} - \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Ici: petites oscillations
autour de $\theta = \pi$

$\sin \theta$ au voisinage de π



$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

pendule pesant: si $\varphi \ll 1$

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \varphi = 0$$

$\underbrace{\frac{3}{2} \frac{g}{l}}_{\Omega_0^2} \ddot{\varphi} + \Omega_0^2 \varphi = 0$
oscillateur harmonique
pulsation propre est Ω_0

Résolution numérique

↳ Analyse IV !

6

Vous n'avez pas les outils pour la résoudre. Elle ne peut pas être résolue de manière analytique. Dans les deux cas, l'équation différentielle complète doit être résolue de manière numérique. Vous verrez les outils pour cette résolution numérique plus tard dans vos études. C'est en analyse 4.

Notes

Summary

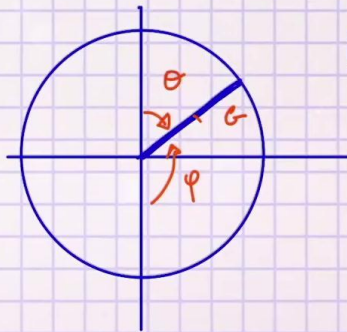


$$\ddot{\theta} - \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

Ici: petites oscillations
autour de $\theta = \pi$

$\sin \theta$ au voisinage de π

Résolution numérique



$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0$$

pendule pesant: si $\varphi \ll 1$

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \varphi = 0$$

$\underbrace{\frac{3}{2} \frac{g}{\ell}}_{\Omega_0^2} \ddot{\varphi} + \varphi = 0$
oscillateur harmonique
pulsation propre est Ω_0

6

Je vous propose maintenant de regarder cette résolution numérique avec un Notebook Jupyter. Cela nous permettra d'obtenir des résultats qui nous permettront de comprendre la physique de cet objet.

Notes

Summary

19m 36s



XI - Application du solide indéformable XI-1. Chute d'une barre et pendule physique

Jupyter manip_barre_qui_tombe Last Checkpoint: 12/01/2020 (autosaved)

File Edit View Insert Cell Kernel Widgets Help Trusted Python 3

L'équation différentielle de la barre qui tombe est :

$$\ddot{\theta} - \Omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$
$$\Omega_0^2 = \frac{2g}{3l}$$

On la convertit vers un système d'équation d'ordre 1 soit, une équation sur une variable vectorielle, soluble par RK avec scipy.

Nous utilisons la variable intermédiaire $x = \dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = x$$
$$\dot{x} = \Omega_0^2 \sin(\theta)$$
$$y = [\theta, x]$$

est notre variable vectorielle.

$$\dot{y} = [\dot{\theta}, \dot{x}] = [x, \Omega_0^2 \sin(\theta)]$$

Les valeurs initiales sont $[\theta_0, 0]$ (Lâché de l'angle θ_0 sans vitesse initiale).

```
In [5]: def get_func(Omega0):  
def func(t, y0):  
theta, x = y0  
y_dot = [x, Omega0**2*np.sin(theta)]  
return y_dot  
return func
```

```
In [6]: #Intégration par RK  
def get_motion_times(theta_0, theta_dot_0, Omega0, tmax):  
time = np.arange(0, tmax, 0.0001)  
res = scipy.integrate.solve_ivp(get_func(Omega0), [0, tmax], [theta_0, theta_dot_0], method='DOP853', t_eval=time)  
return res
```

```
In [19]: Temps_de_simulation = 10 #s  
Angle de depart = 170 # degrés
```

Nous définissons ici l'accélération de la pesanteur et nous prenons une barre de longueur un mètre. Nous utilisons θ comme paramètre. L'équation différentielle est celle notée ici avec $\omega_0^2 = 2g/3l$. L'astuce numérique est de convertir cette équation différentielle en un système d'équations d'ordre 1, sera soluble par l'algorithme Runge-Kutta que vous verrez en analyse 4. Nous utilisons donc une variable intermédiaire x égal $\dot{\theta}$ point.

Notes

Summary

19m 49s



XI - Application du solide indéformable XI-1. Chute d'une barre et pendule physique

```
jupyter manip_barre_qui_tombe Last Checkpoint: 12/01/2020 (unsaved changes)
File Edit View Insert Cell Kernel Widgets Help Trusted Python 3
Les valeurs initiales sont  $[\theta_0, 0]$  (Lâché de l'angle  $\theta_0$  sans vitesse initiale).

In [20]: def get_func(omega0):
def func(t, y0):
theta, x = y0
y_dot = [x, omega0**2*np.sin(theta)]
return y_dot
return func

In [21]: #Intégration par RK
def get_motion_times(theta_0, theta_dot_0, omega0, tmax):
time = np.arange(0, tmax, 0.0001)
res = scipy.integrate.solve_ivp(get_func(omega0), [0, tmax], [theta_0, theta_dot_0], method='DOP853', t_eval=time)
return res

In [19]: Temps_de_simulation = 10 #s
Angle_de_depart = 15 # degrés
motion = get_motion_times(Angle_de_depart*np.pi/180, 0, omega0, Temps_de_simulation)

df1 = pd.DataFrame({
'Temps':motion.t,
'Angle':motion.y[0],
'VitAngle':motion.y[1]})

pisurdeux = [0, Temps_de_simulation]
pisurdeuxy = [90, 90]
piy = [180, 180]

p1 = figure(plot_width=800, plot_height=300, x_axis_label="temps", y_axis_label="angle")
p1.line(x=df1['Temps'], y=(180/np.pi)*df1['Angle'], line_width=3)
p1.line(x=pisurdeux, y=pisurdeuxy, line_width=2, color="red")
p1.line(x=pisurdeux, y=piy, line_width=2, color="darkorange")

show(p1)
```

Ce qui nous permet d'arriver à deux équations différentielles θ point égal x et puisque θ point égal x , θ deux points pour x point, donc $\dot{x} = \Omega \omega^2 \sin(\theta)$. Nous pouvons donc avoir une écriture matricielle de notre équation différentielle. Sa définition en Python ne prend que quelques lignes. L'intégration par Runge-Kutta existe dans Python, dans une librairie. Puisque la résolution est numérique, nous allons devoir définir un tableau de valeurs temporelles dans un intervalle donné. Nous ne savons pas forcément à quoi nous attendre. Nous pouvons prendre dix secondes. Ça paraît raisonnable si on pense à l'expérience de l'oscillation d'une barre. Nous devons choisir un angle de départ défini par la verticale. Commençons par un angle de 15 degrés.

Notes

Summary



20m 33s

XI - Application du solide indéformable XI-1. Chute d'une barre et pendule physique

```
jupyter manip_barre_qui_tombe Last Checkpoint: 12/01/2020 (unsaved changes) Logout

File Edit View Insert Cell Kernel Widgets Help Trusted Python 3

 $\dot{y} = [\dot{\theta}, \dot{x}] = [x, \Omega_0^2 \sin(\theta)]$ 

Les valeurs initiales sont  $[\theta_0, 0]$  (Lâché de l'angle  $\theta_0$  sans vitesse initiale).

In [20]: def get_func(Omega0):
def func(t, y0):
theta, x = y0
y_dot = [x, Omega0**2*np.sin(theta)]
return y_dot
return func

In [21]: #Intégration pa RK
def get_motion_times(theta_0, theta_dot_0, Omega0, tmax):
time = np.arange(0, tmax, 0.0001)
res = scipy.integrate.solve_ivp(get_func(Omega0), [0, tmax], [theta_0, theta_dot_0], method='DOP853', t_eval=time)
return res

In [22]: Temps_de_simulation = 10 #s
Angle_de_depart = 5 # degrés
motion = get_motion_times(Angle_de_depart*np.pi/180, 0, Omega0, Temps_de_simulation)

df1 = pd.DataFrame({
'Temps':motion.t,
'Angle':motion.y[0],
'VitAngle':motion.y[1]})

pisurdeux = [0, Temps_de_simulation]
pisurdeuxy = [90, 90]
piy = [180, 180]

p1 = figure(plot_width=800, plot_height=300, x_axis_label="temps", y_axis_label="angle")
p1.line(x=df1['Temps'], y=(180/np.pi)*df1['Angle'], line_width=3)
p1.line(x=pisurdeux, y=pisurdeuxy, line_width=2, color="red")
p1.line(x=pisurdeux, y=piy, line_width=2, color="darkorange")

show(p1)
```

La résolution numérique est extrêmement rapide. Nous pouvons ensuite tracer l'angle θ en fonction du temps. Ainsi que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ point en fonction du temps. Le graphe supérieur nous montre donc un angle θ qui part de 15 degrés juste au-dessus de zéro, qui augmente. La ligne rouge marque la ligne des 90 degrés. Donc $\pi/2$, le sol dans le cas de la barre, l'angle continue à augmenter. La ligne orange marque la verticale, les 180 degrés et notre angle θ augmente jusqu'à presque 360 degrés. Très exactement 345, le complémentaire de 15. Et nous voyons ensuite la barre qui oscille, l'angle qui diminue, qui revient à 15 degrés, etc. Nous avons trois oscillations dans ce temps dix secondes. La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ point suit une courbe assez particulière qui semble formée d'accolades. Elle démarre à zéro, la barre est lâchée sans vitesse initiale. Elle augmente, atteint un maximum lorsque la barre passe par 180 degrés, donc par la verticale. Revient à zéro quand la barre est montée de l'autre côté. Puis repasse par un maximum en norme, mais dans les valeurs $\dot{\theta}$ point négatives pour le deuxième passage à 180 degrés et redevient nul lorsque la barre a retrouvé sa position initiale. Que se passe-t-il si nous faisons le même calcul, mais maintenant, avec un départ encore plus proche de la verticale, cinq degrés ?

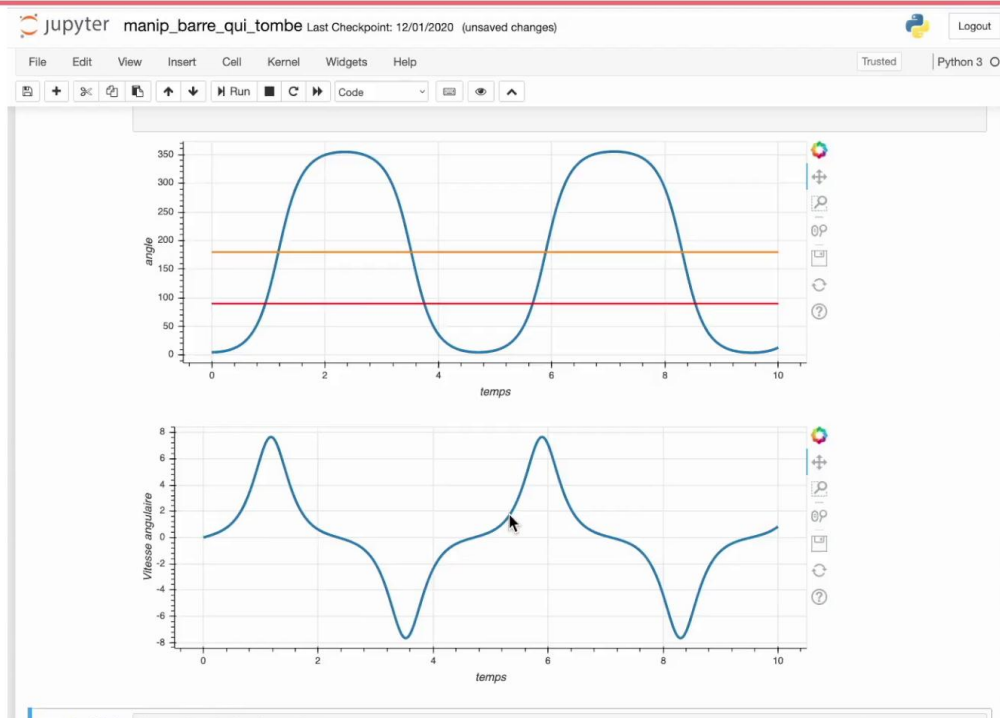
Notes

Summary

21m 29s



XI - Application du solide indéformable XI-1. Chute d'une barre et pendule physique



Nous remarquons dans ce cas-là qu'il n'y a plus que deux oscillations sur notre période de dix secondes et une courbe qui a franchement une forme d'accolades.

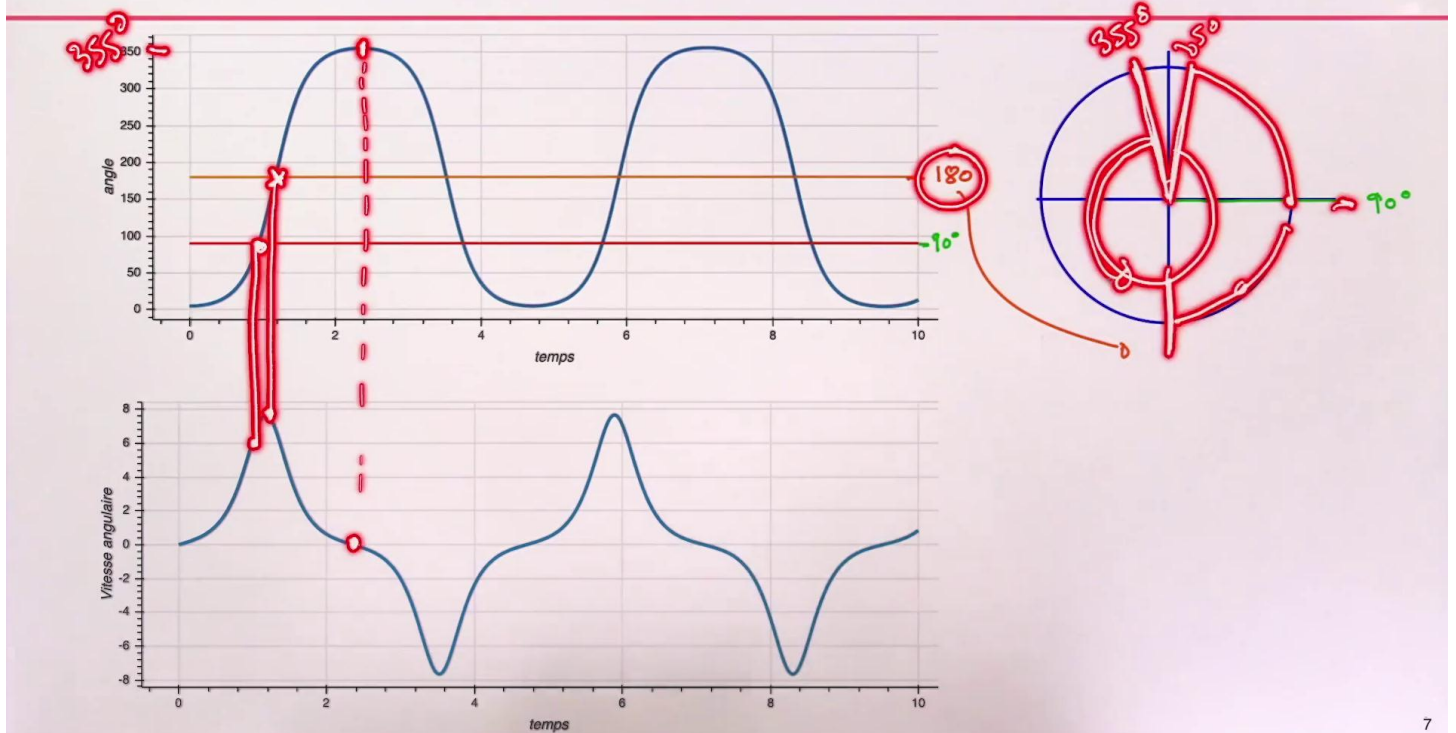
Notes

Summary



23m 29s

XI - Application du solide indéformable XI-1. Chute d'une barre et pendule physique



7

Faisons le lien entre notre dispositif expérimental et les courbes tracées. La ligne orange des 180 degrés, soit π , correspond à la verticale. La ligne rouge correspond à l'axe horizontal vers la droite. C'est les 90 degrés. Nous sommes partis d'un angle de cinq degrés, donc très proche de la verticale. Au bout d'un certain temps, la barre traverse l'axe des 90 degrés. C'est lorsqu'elle se trouve à cet endroit-là, la vitesse angulaire n'est pas loin d'être maximum, mais elle ne l'est pas encore tout à fait. La barre continue sa course. Elle continue d'accélérer et arrive à la verticale, donc 180 degrés. C'est donc le moment où elle croise la ligne orange. À ce moment-là, la vitesse angulaire est maximum. Puis l'angle θ continue d'augmenter et il va arriver jusqu'au complémentaire cinq degrés, soit 355 degrés. L'angle maximum ici sera donc 355. Lorsque la barre arrive à cet angle maximum, la vitesse angulaire est nulle. La barre s'arrête avant de repartir dans l'autre sens.

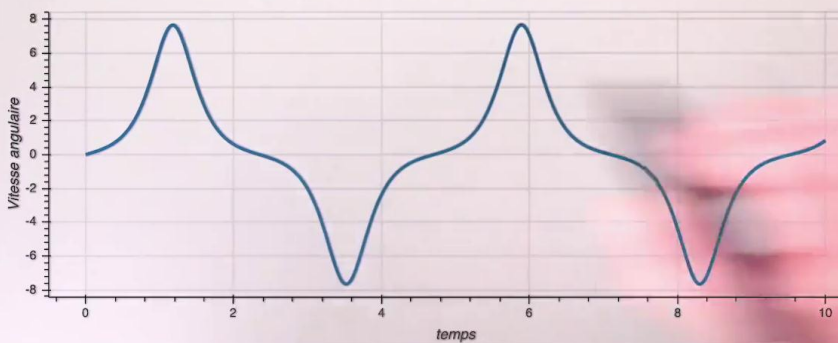
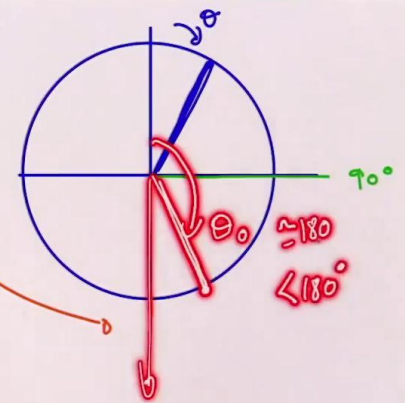
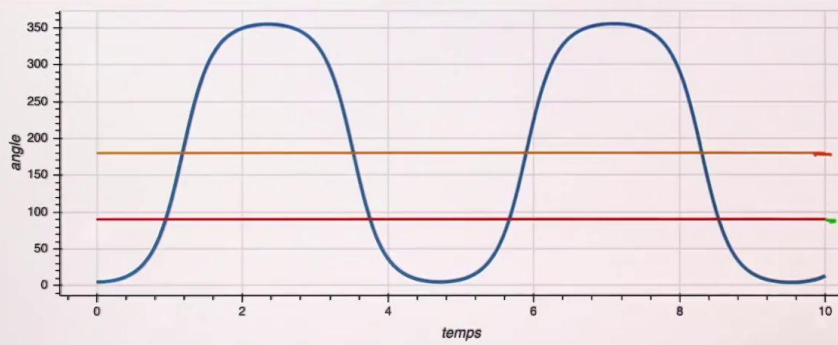
Notes

Summary

23m 40s



XI - Application du solide indéformable XI-1. Chute d'une barre et pendule physique



Maintenant, la question est à quoi nous attendre si nous lâchons la barre lorsqu'elle est proche de la verticale vers le bas ? Notre angle θ zéro doit à ce moment-là être proche de 180. Un peu plus petit que 180 degrés.

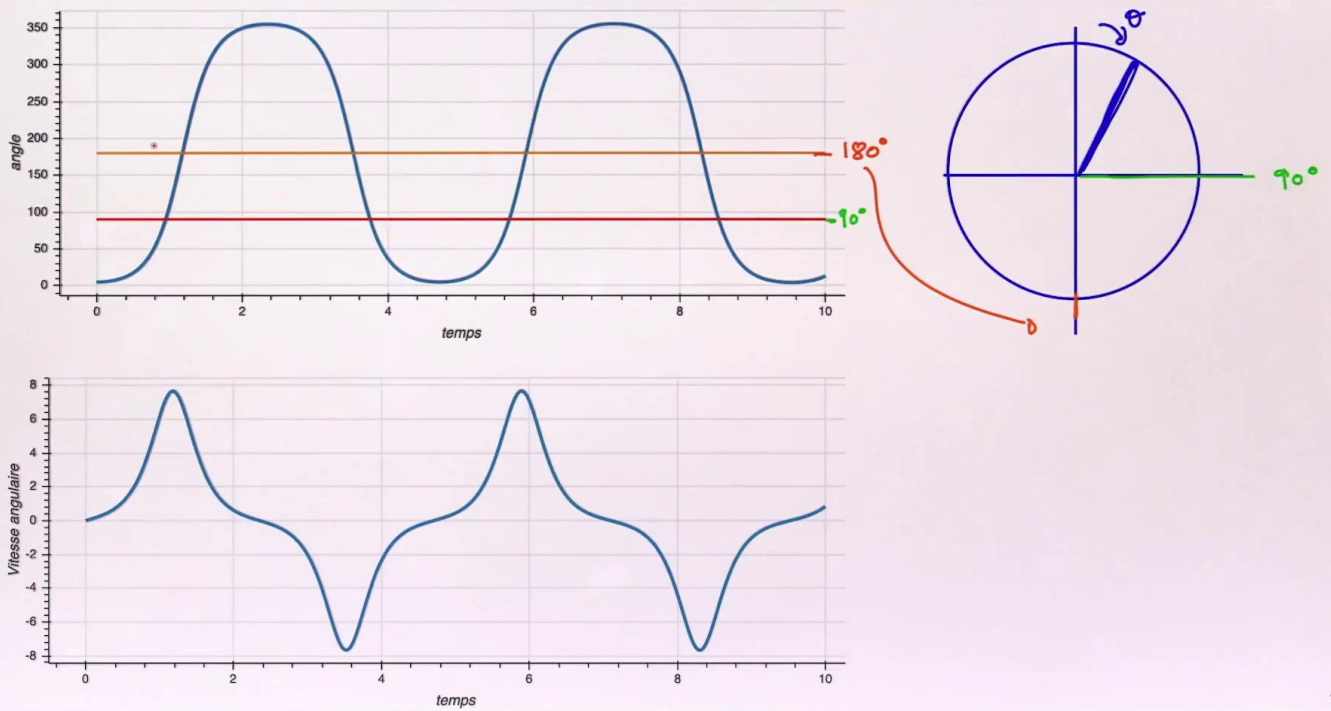
Notes

Summary



25m 36s

XI - Application du solide indéformable XI-1. Chute d'une barre et pendule physique



7

Nous n'allons donc pas partir avec un angle d'attaque zéro proche de zéro, mais avec un angle θ zéro proche des 180. Voyons donc ce que cela donne.

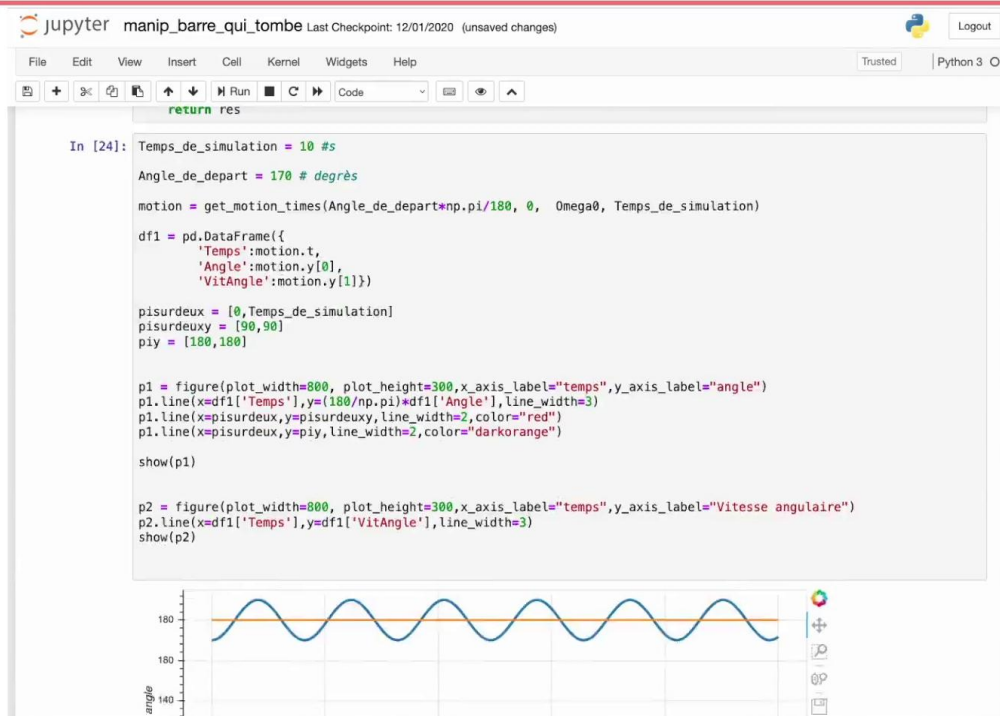
Notes

Summary

25m 55s



XI - Application du solide indéformable XI-1. Chute d'une barre et pendule physique



Prenons 170 degrés, ce qui me donne dix degrés autour de la verticale.

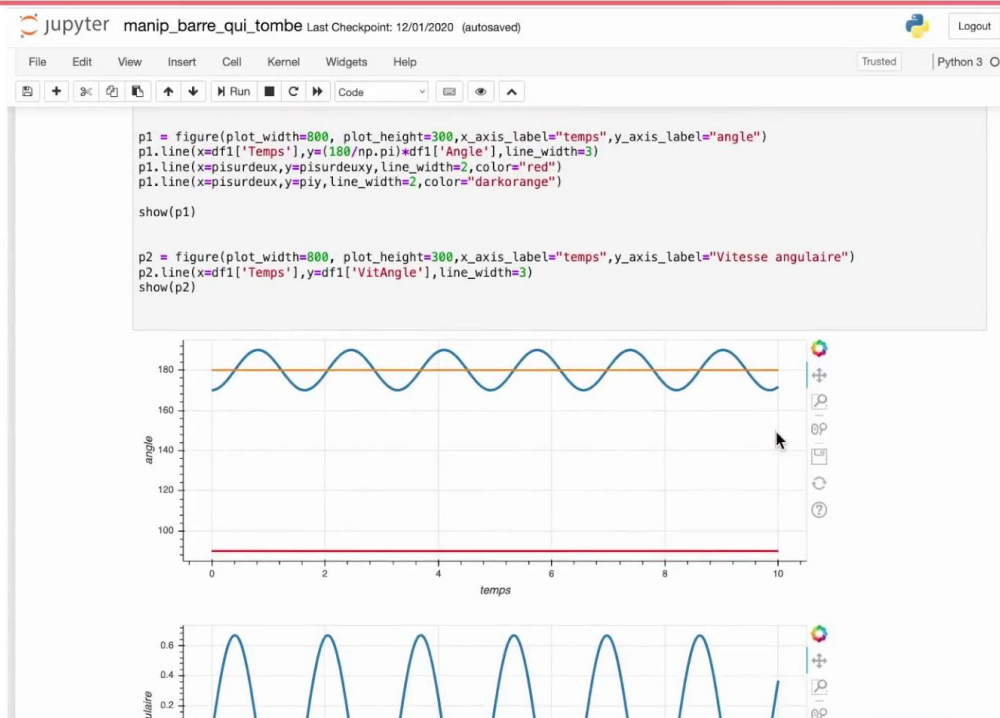
Notes

Summary



26m 07s

XI - Application du solide indéformable XI-1. Chute d'une barre et pendule physique



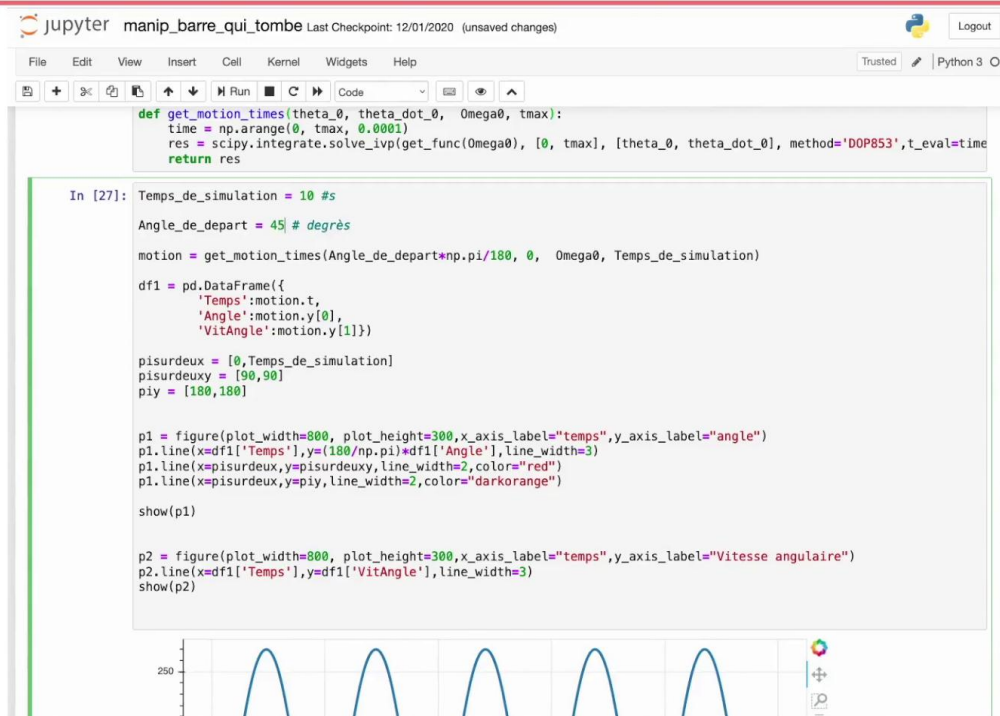
Nous observons alors des oscillations tassés autour de 180, donc très loin de 90 et je n'ai même plus zéro sur le graphe et une vitesse angulaire qui prend une forme quasiment sinusoïdale. Nous avons maintenant 1, 2, 3, 4, 5, 6 maximum, six oscillations et même un tout petit peu plus dans notre temps de dix secondes. La période a donc fortement diminué.

Notes

Summary



XI - Application du solide indéformable XI-1. Chute d'une barre et pendule physique



Que se passe-t-il si nous nous rapprochons encore plus des petits angles dans la définition du pendule ? Je prends maintenant 175 degrés. L'amplitude a encore diminué. Par contre, je n'ai pas de changement dans le nombre de maximum. La période n'a pas changé. L'allure de la vitesse angulaire est toujours celle d'une sinusoïde. Je suis bien donc dans l'approximation des petits angles, mais cette fois, il aurait fallu que j'utilise l'angle φ qui est 180 degrés moins θ pour obtenir une oscillation autour de zéro. Nous pouvons prendre un angle de 135 degrés. Cela correspond à 45 degrés de la verticale, mais toujours dans la partie inférieure. Un, deux, trois, quatre, cinq, six. Nous avons toujours six maximum, mais la courbe s'arrête un petit peu avant le dernier minimum. La période a légèrement changé et on peut commencer à se demander si la vitesse angulaire a toujours bien une forme sinusoïdale ou si cela ne devient pas plus triangulaire. Nous quittons l'approximation des petits angles. Voyons maintenant ce qui se passe si je prends un angle de 90 degrés. Je n'ai plus que cinq maximums et une fonction vitesse angulaire qui cette fois n'est clairement pas sinusoïdale. Je peux essayer un angle de 45 degrés.

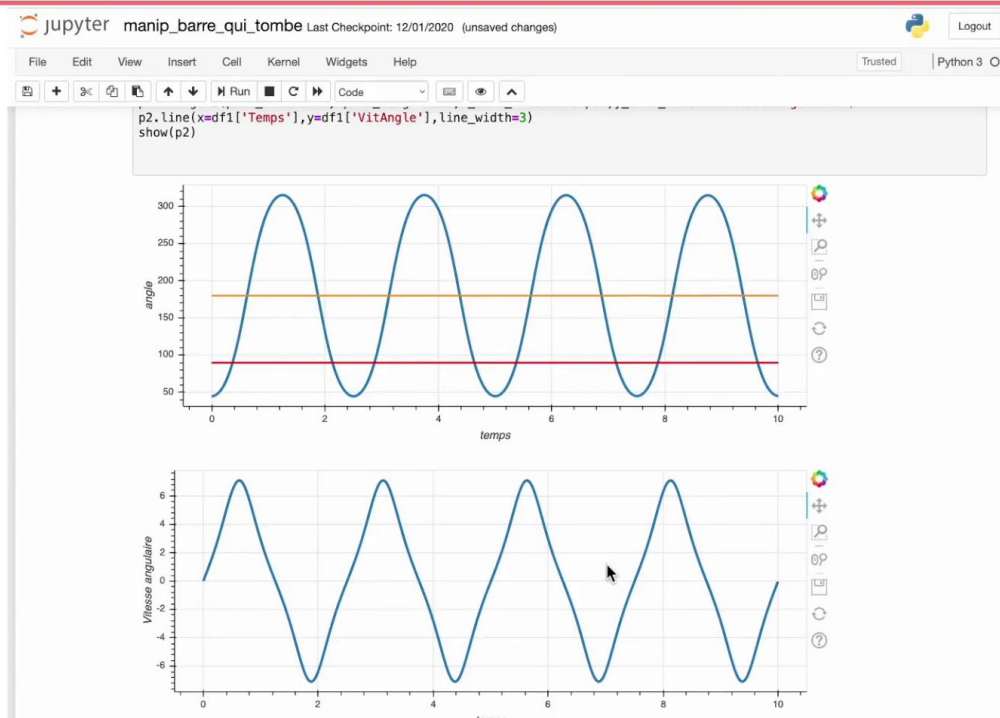
Notes

Summary



26m 53s

XI - Application du solide indéformable XI-1. Chute d'une barre et pendule physique



Nous voyons cette fois la barre qui traverse l'horizontale et la verticale et une vitesse angulaire qui commence à prendre ses formes d'accollades.

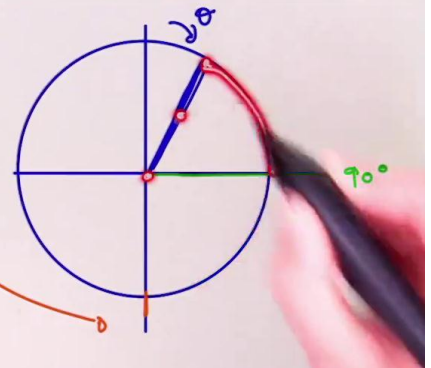
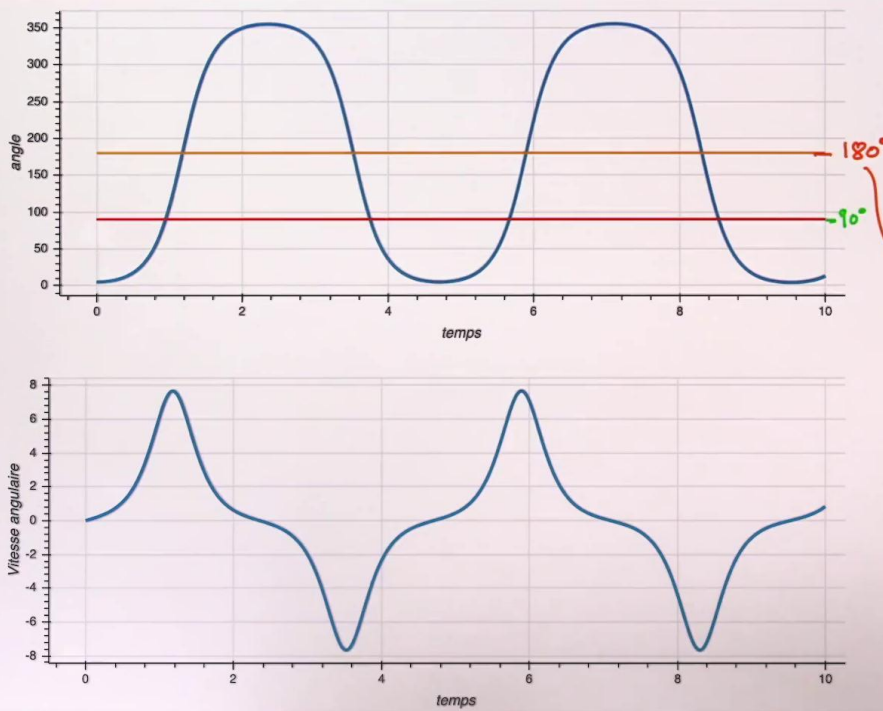
Notes

Summary



28m 31s

XI - Application du solide indéformable XI-1. Chute d'une barre et pendule physique



La prochaine étape sera d'analyser plus précisément le mouvement de l'extrémité de la barre et du centre de masse.

Notes

Summary



28m 46s



Voilà, nous avons analysé notre barre qui pivote. Nous avons fait le traitement avec deux paramètres, soit l'angle depuis la verticale vers le haut, soit l'angle depuis la verticale vers le bas, et nous sommes arrivés à une équation différentielle. La résolution numérique de cette équation différentielle nous a permis de comprendre le comportement de ce pendule physique. Dans la prochaine vidéo, nous allons nous intéresser à ce qui se passe lorsque nous regardons la barre tomber et en particulier au mouvement de point sur la barre : le centre de masse et l'extrémité.

Notes

Summary

28m 55s

