Support de cours

Cours:

PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet)

Vidéo:

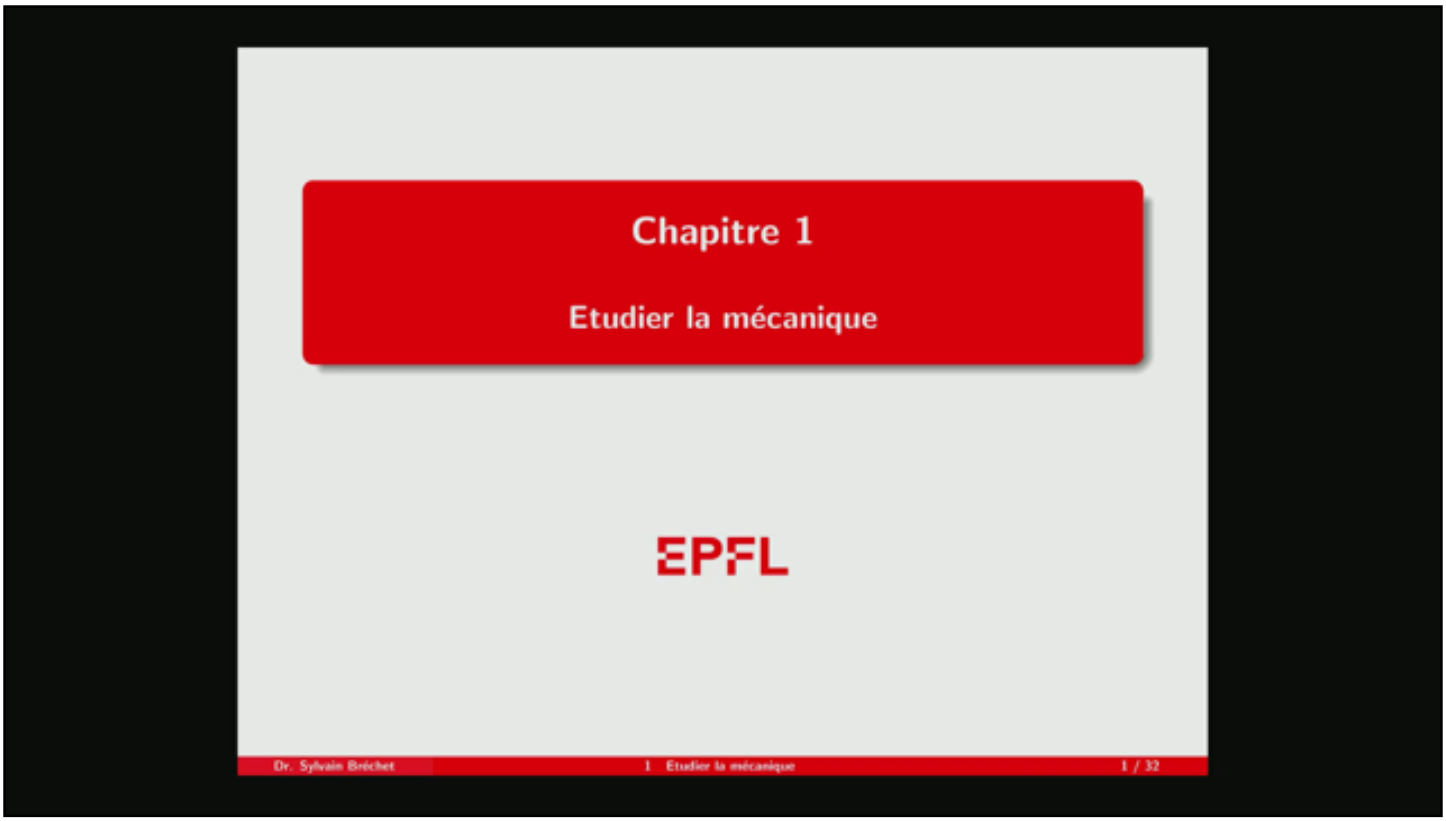
1 - Etudier la mécanique

Concepts (extraits des sous-titres générés automatiquement) :

Raison de l'être. Cours de physique générale. Petite présentation d'ordre. Étudiants de première année. Équations mathématiques. Loi d'action. Pouvoir. Exemples particuliers de forces. Grand newton. Premier cours. Deuxième semaine. Outils mathématiques. Étude du modèle. Rigueur de la description mathématique. Bonne acquisition.

vers la recherche de séquences vidéo
(dans PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet).)

vers la vidéo

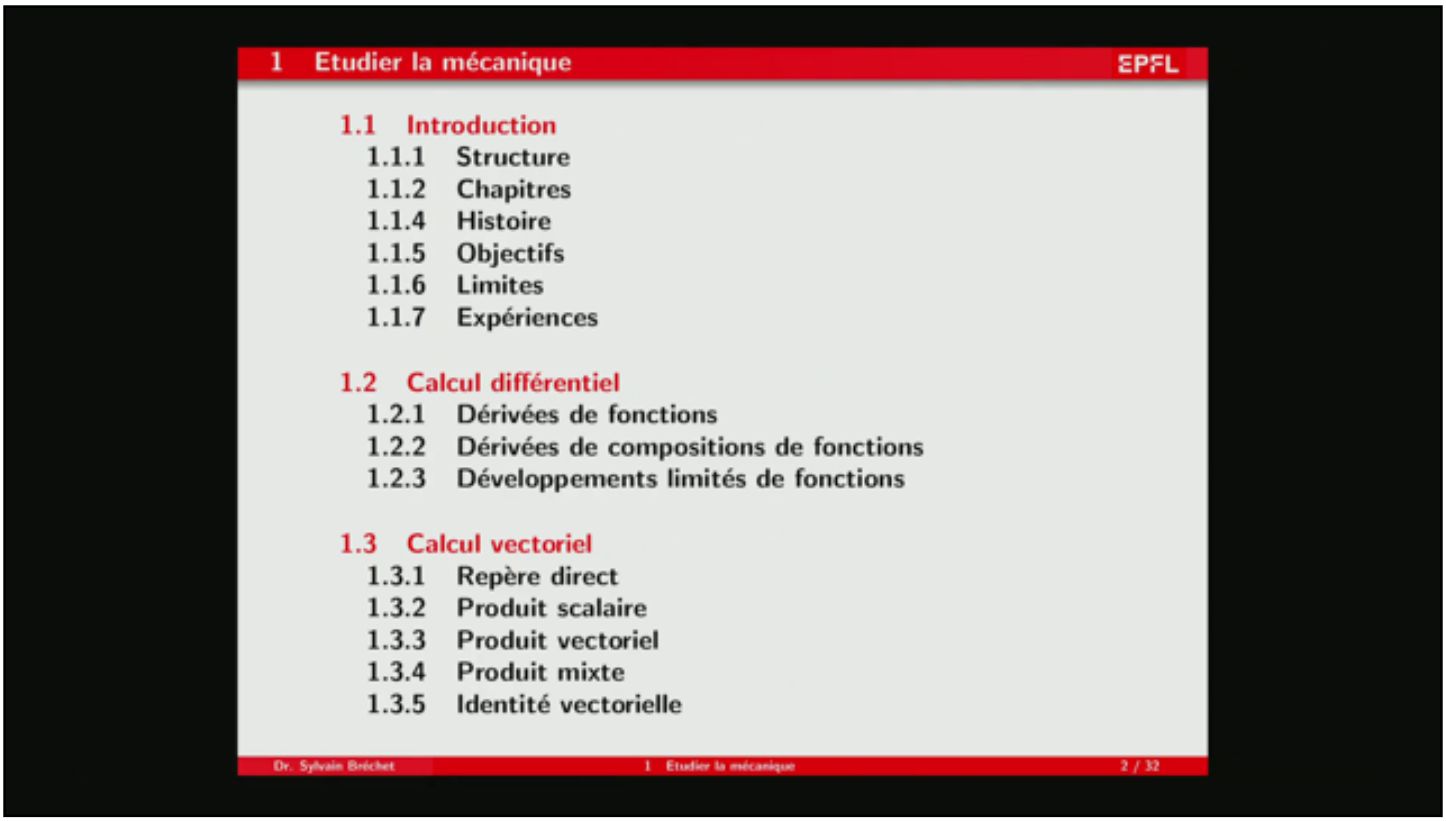


...

notes

résumé

0m 0s

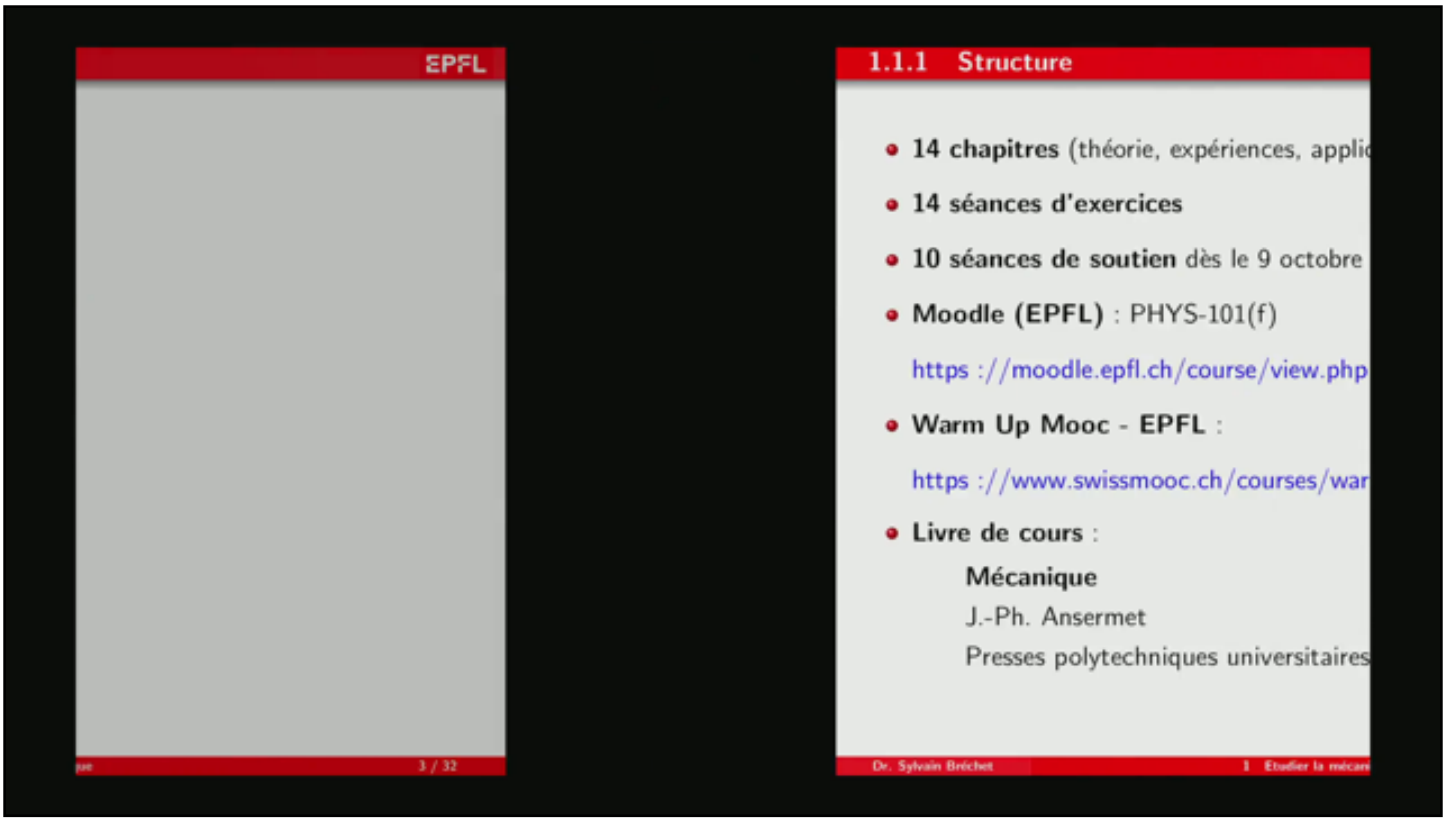


Ces sous-titres ont été générés automatiquement ... ... Mesdames, messieurs, bienvenue, bienvenue à l'EPFL, bienvenue à ce cours de physique générale, qui, comme vous avez pu le voir, va être consacré à la mécanique. D'ailleurs, vous avez devant vous un système de masse variable dont on va discuter les tenants et aboutissants au dixième chapitre de ce cours. Alors, j'aimerais rapidement présenter mon nom et Sylvain Breschet. Je suis physicien, théoricien, voire même physicien, mathématicien de formation. Donc, j'adore les mathématiques comme vous, d'accord ? Mais j'ai aussi un goût prononcé pour l'expérience, comme vous allez pouvoir vous en rendre compte.

notes

résumé

0m 1s

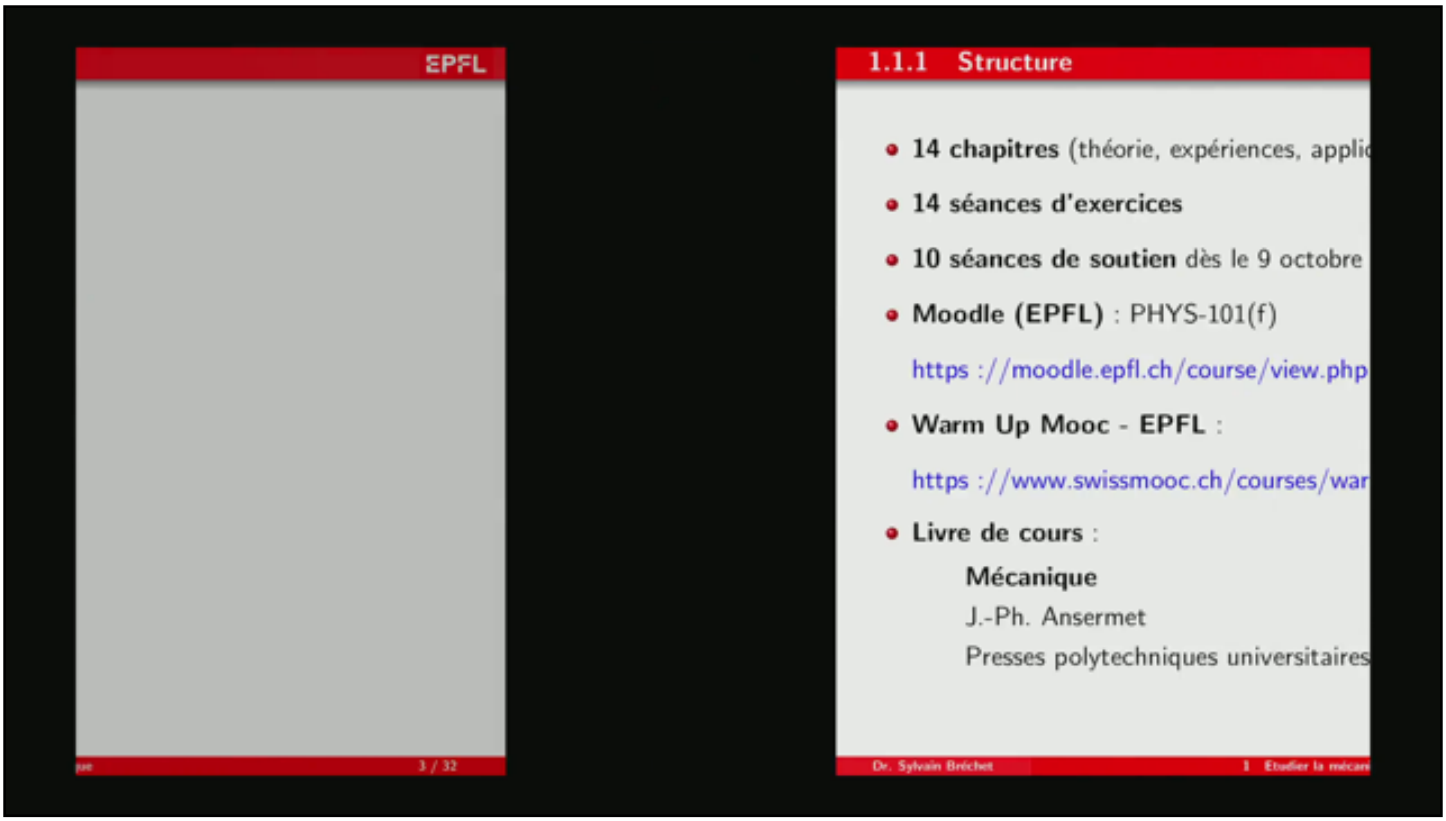


Alors, j'aimerais commencer par vous donner rapidement le contenu de ce premier chapitre de cours qui correspond à ce premier cours, c'est-à-dire à cette première journée de cours, d'accord ? On va d'abord ensemble voir une introduction au sujet, à la physique en général, mais aussi à la mécanique en particulier. Je vous parlerai un tout petit peu de la structure du cours, des aspects logistiques. On verra le contenu de ce cours. Et bien sûr, il faut mettre la mécanique dans son contexte. Donc, il est important de commencer par une petite présentation d'ordre plutôt historique. Et on parlera aussi ensemble des objectifs de ce cours et bien sûr des limites, puisque quand on présente un sujet, il a toujours ses limites. Lorsqu'on fait un modèle, et c'est ce qu'on fait en mécanique, différents modèles en fait, ces modèles ont des limites, d'accord ? Par exemple, si vous voulez décrire le mouvement avec une vitesse très élevée et que cette vitesse s'approche de la vitesse à lumière, le modèle de la mécanique d'inutilienne ne sera pas le meilleur pour le faire. On va en parler en détail plus tard. Et bien sûr, ce qui est important, voire même essentiel, c'est de confronter la théorie à l'expérience. L'expérience fait partie intégrante de la démarche, d'accord ? On a des modèles, ces modèles, on veut les vérifier ou les infirmer. Il faut donc les confronter aux expériences pour voir si ces modèles finalement sont corrects dans le contexte dans lequel on les décrit. Et puis aujourd'hui, on va dans ce premier chapitre de cours voir des outils mathématiques qui seront essentiels pour faire ensemble de la physique, d'accord ? En réalité, lorsqu'on veut faire de la physique, je prends une analogie que j'aime beaucoup, qui est celle d'un funambule. Imaginez que vous traversez le précipice de l'ignorance sur un fil, d'accord ? En essayant, tant bien de mal, de rejoindre l'autre

notes

résumé

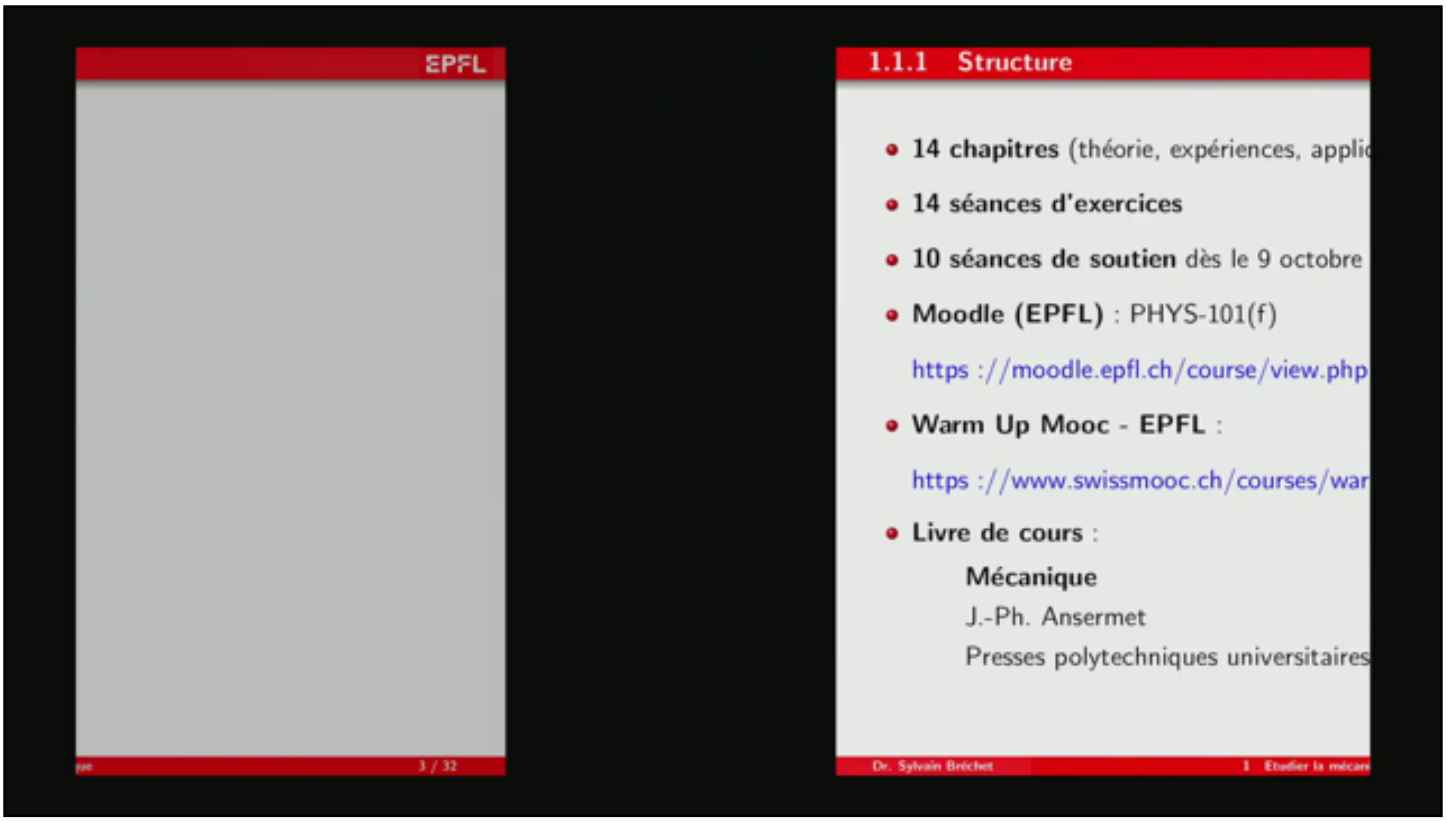
0m 49s



rive, un pied après l'autre. C'est un exercice qui est perieux, c'est tout un art qu'on va apprendre ensemble, et dans l'analogie, vous avez un pied qui représente l'intuition physique, l'autre, la rigueur de la description mathématique. C'est un pied après l'autre, d'accord ? C'est déjà perieux. Il faut une barre pour tenter d'avoir l'équilibre, il faut une certaine approche systématique qui permet de réussir à faire de la modélisation. Et donc, ce que j'ai envie de dire, c'est que si vous vous dites, pour faire de la modélisation, il suffit de résoudre des équations mathématiques et de mettre des constantes physiques là où c'est nécessaire, ça serait comme de traverser le fil sur un pied. Ça, c'est pas perieux, c'est carrément suicidaire, d'accord ? Ou, à contrario, si vous vous dites, finalement, on fait des mathématiques pendant toute la journée, alors, physique, on va y aller à l'intuition, d'accord ? On va utiliser notre intuition physique, on va réussir à tout dégager simplement en raisonnant. Et bien là, c'est pareil, c'est l'autre pied que vous allez utiliser, d'accord ? C'est tout aussi dangereux, c'est suicidaire également. Donc il est absolument nécessaire, d'allier l'intuition physique à la description mathématique, et c'est ça qui rend la modélisation physique complexe, d'accord ? C'est pour ça que, souvent, en entendant les étudiants de première année, ce sera peut-être autre cas, dire, finalement, la physique, c'est compliqué. Oui, parce qu'il y a, d'une part, la modélisation, d'autre part, la résolution mathématique. D'accord ? Lorsqu'on fait de la physique, on veut décrire une évolution, un mouvement dans le temps, d'accord ? Ce mouvement est en général décrit par des fonctions qui dépendent du temps, qui dépendent de l'espace, d'accord ? Et clairement, les grandeurs vont évoluer au cours du temps, c'est même ce qui fait tout l'intérêt de la démarche. Si elle s'évolue, elle varie. Si elle varie, il faut voir comment elle varie, et

notes

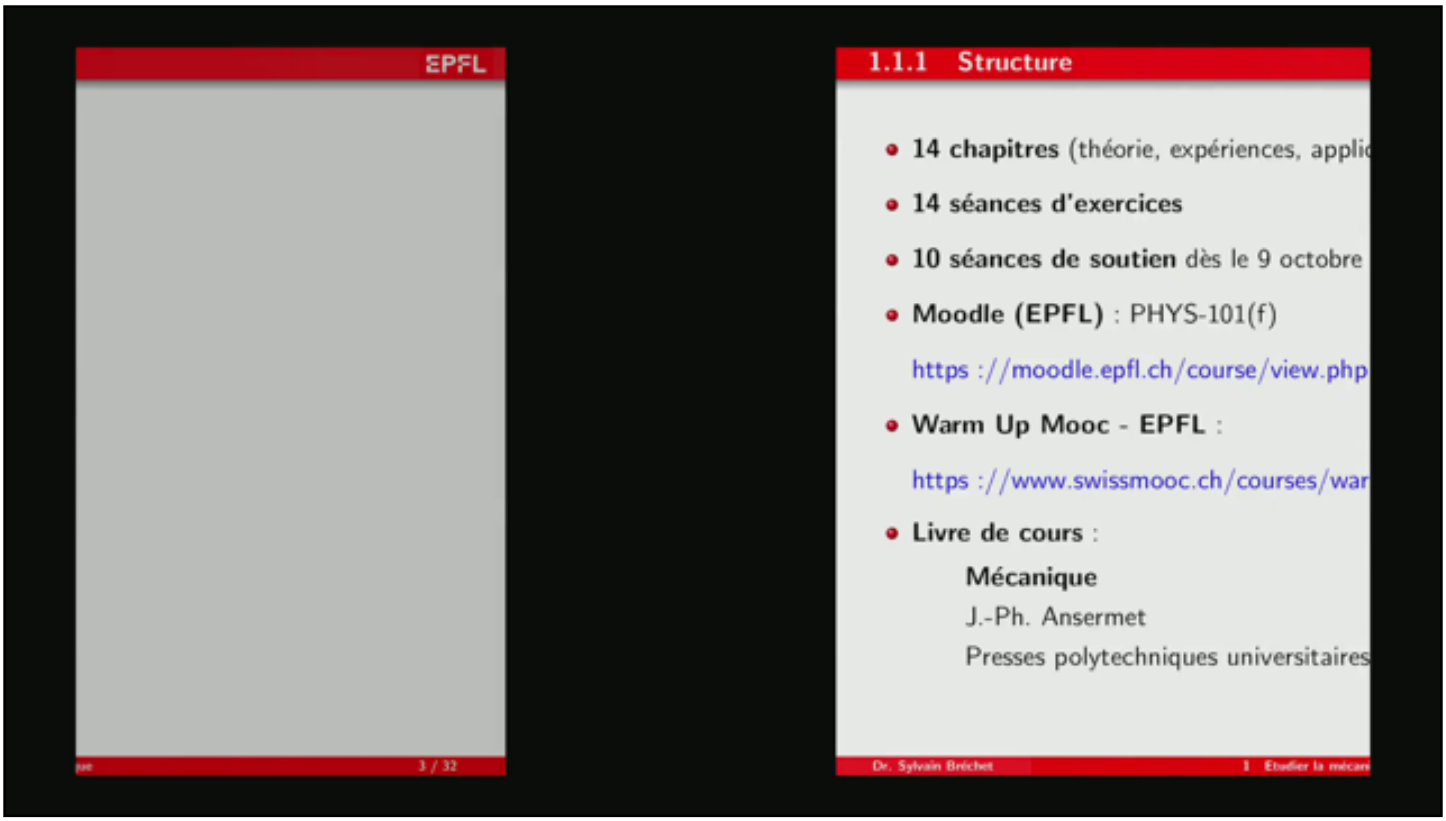
résumé



comment elle varie localement dans le temps. Et donc pour décrire ceci, on a besoin d'un outil tiré de l'analyse, qui est le calcul différentiel, on va ensemble voir comment, dans un premier temps, on peut déterminer des dérivés de fonctions, on aura besoin d'aller encore plus loin, puisqu'on va se retrouver face à une situation où on a des fonctions dont l'argument est lui-même une fonction. Par exemple, vous avez un ressort, un oscillateur harmonique, qui va être décrit par une sinusoid, que ce soit un sinus ou un cossinus, dont l'argument sera lui-même une fonction du temps. Vous verrez comment on peut calculer ces dérivés de la composition de fonctions du temps. On aura aussi besoin de développement limité. Si vous avez un pendule qui est aussi, pour décrire la dynamique, vous avez besoin de faire des projections. Notamment, la projection le long du mouvement va faire intervenir le sinus d'un angle. On peut se poser la question, qu'est-ce qui se passe si l'angle est petit ? Eh bien, si l'angle est petit, on va pouvoir exprimer le sinus comme un polinome, et si il est vraiment petit, on pourra retenir le premier terme, qui est un terme du premier ordre, et on aura une description, qui évidemment va être celle d'un oscillateur harmonique. Donc les développements limités seront eux aussi essentiels. Ça, c'est pour l'analyse. On aura aussi évidemment besoin de géométrie. Le mouvement, il a lieu dans l'espace. On va utiliser ce qu'on appelle une droite orientée. Cette droite orientée, c'est un vecteur. Le concept de vecteur, je suis conscient en mathématiques, va bien au-delà de la droite orientée. Même des polinomes peuvent faire partie d'un espace vectoriel ou des matrices également. On aura l'occasion d'en reparler. On va définir un repère qui nous permet de définir des produits de vecteur, un produit qui nous retourne à un nombre qui est le produit scalaire, un produit

notes

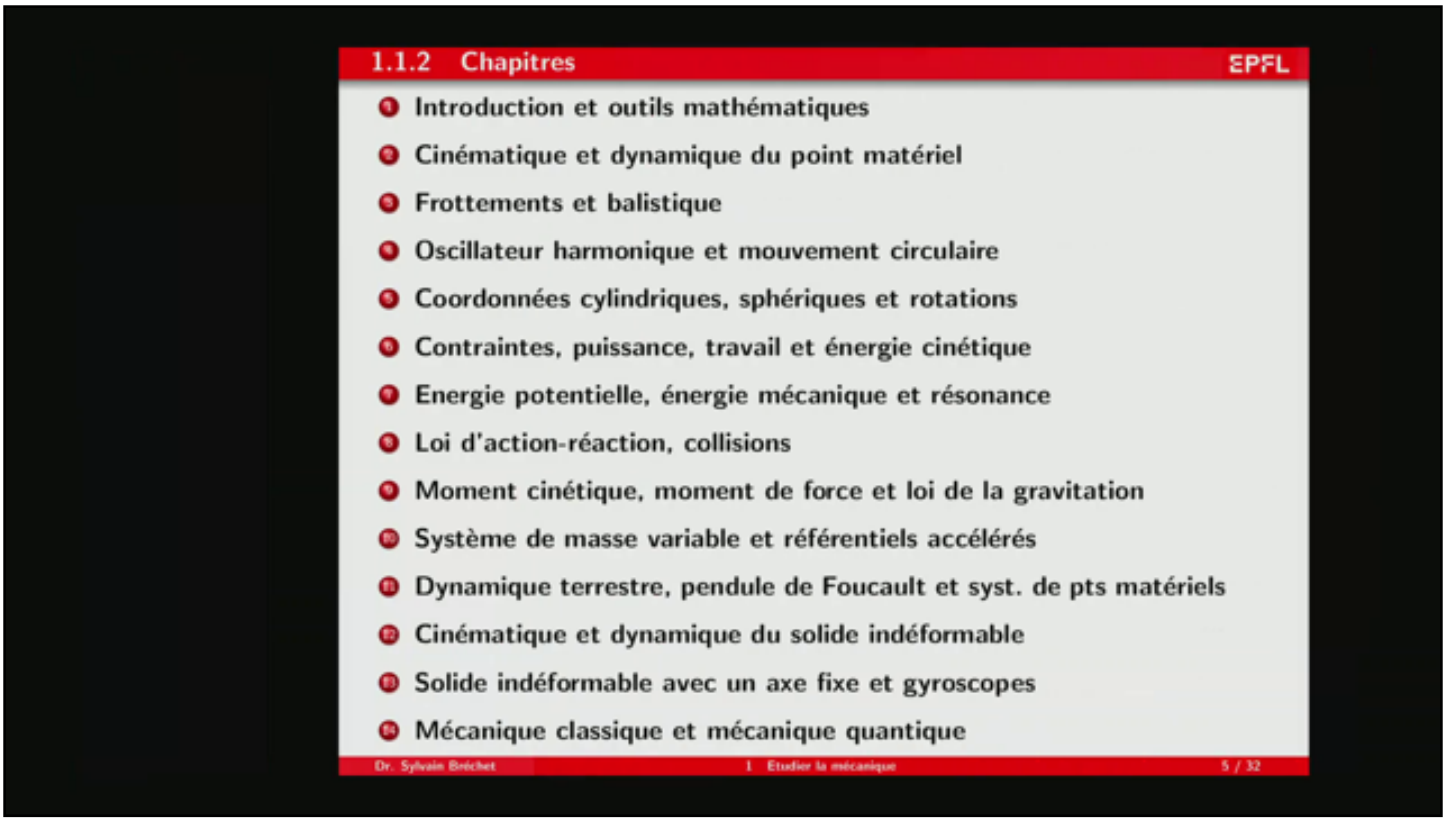
résumé



qui nous retourne à un vecteur qui est le produit vectoriel, pour les combiner ensemble pour obtenir le produit mixte. On dégagera aussi une identité vectorielle qui sera essentielle lorsqu'on voudra décrire ensemble les rotations.

notes

résumé

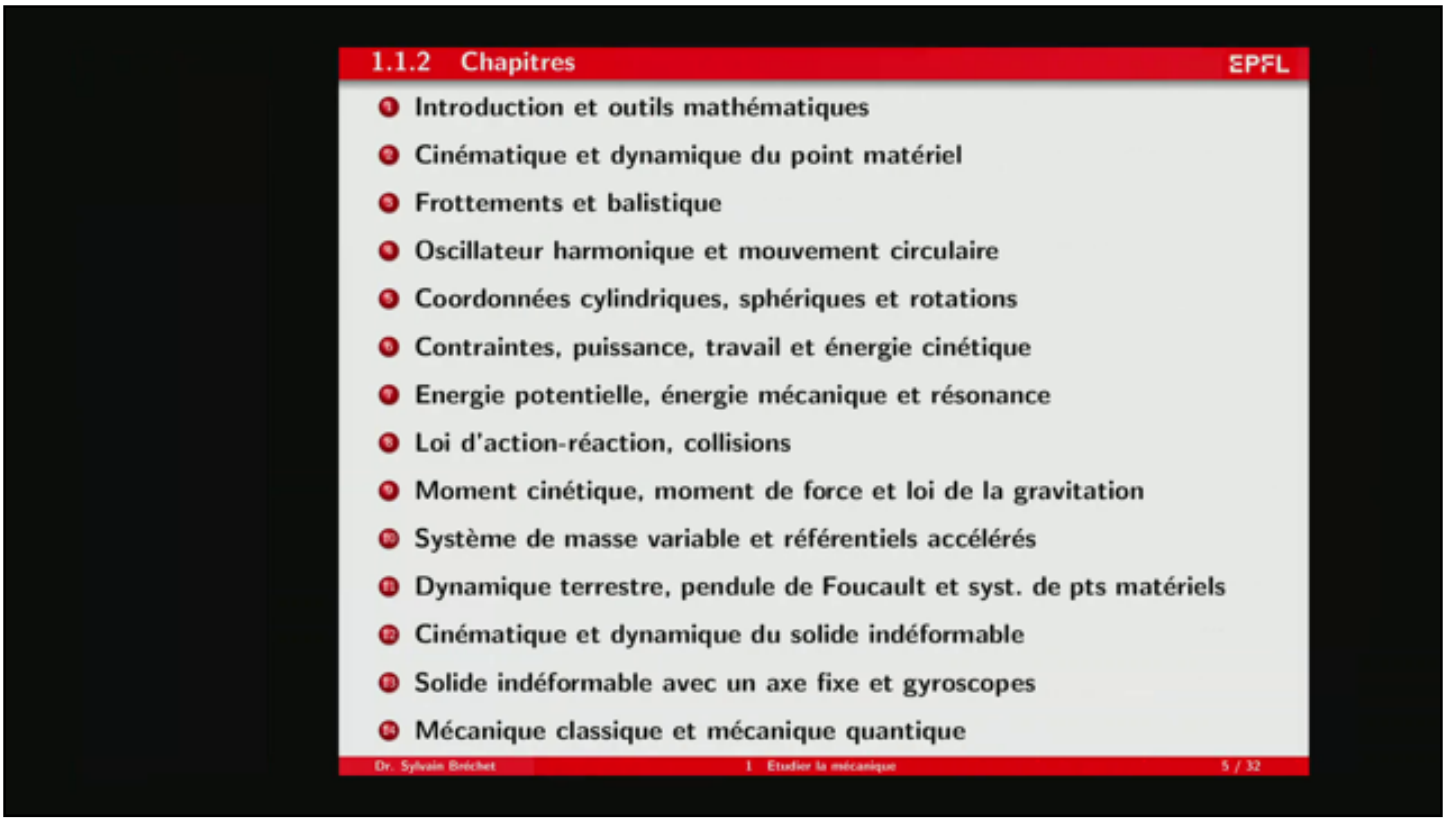


Commençons tout de suite par la structure de ce cours. Je vois une petite erreur. C'était l'année passée que les séances de soutien commençaient le 9 octobre. Il s'agit cette année du 30 septembre. Ce cours sera divisé en 14 chapitres, un par semaine. C'est assez facile à se souvenir. Dans ce cours, on verra ensemble essentiellement de la théorie avec des expériences, je dirais plutôt dans les trois premières périodes du cours, le matin. Et l'après-midi, on aura une heure d'application de cours où on va plutôt voir des exemples particuliers d'applications de la théorie vu le matin. Parfois, on en verra aussi le matin et parfois on aura aussi des éléments théories l'après-midi. Mais grosso modo, c'est comme ça que le temps sera divisé. Il y aura également 14 séances d'exercice, même si la dernière sera un examen blanc en condition pour l'examen final du mois de janvier. Vous aurez 10 séances de soutien qui auront lieu le soir, quand on a lieu le lundi soir, à partir de 18h jusqu'à 19h30. Et ces séances de soutien commenceront donc le 30 septembre, à savoir dès la 4e semaine de cours. Pour vous rappeler au niveau mémotechnique, c'est quand on abordera ensemble l'ossiateur harmonique. C'est la semaine de l'ossiateur harmonique que vous aurez la première séance de soutien. Il y a également un lien vers le site Moodle de secours. Et j'aimerais vous recommander de jeter un coup d'œil au Womocmuk, qui reprend les notions qui seront présentées ces deux semaines, en allant vraiment dans des détails qui sont plus importants que ceux qu'on verra ensemble ici et maintenant. Le livre de cours a été écrit par mon collègue. On a co-écrit ensemble un autre livre de cette même édition, qui est le livre de thermodynamique. Et il a aussi écrit le livre de mécanique, que vous retrouverez au presse politique de l'Écurie-Merci-Romande, c'est-à-dire à EPFL presse. Vous avez

notes

résumé

6m 26s



une série d'exemplaires qui se trouvent à la bibliothèque du Rolex, une dizaine d'exemplaires, donc dépêchez-vous d'aller en récupérer un. Et sinon, il y a encore une autre possibilité, c'est d'accéder au contenu de ce livre directement sur le site Moodle du cours. Vous avez trois liens vers les trois parties du livre que vous pouvez consulter sans devoir nécessairement l'acheter. Mais je vous le recommande, c'est une bonne acquisition. Je vois qu'il y a des personnes qui sont encore debout à l'arrière de l'auditoire. Alors n'hésitez pas à venir devant. Il y a ici une table, donc je peux vous la mettre à disposition. Voilà, il y a de la place pour vous. Il y en a une de l'autre côté, comme j'aurai pas besoin des repères qui sont ici, c'est aussi une possibilité, vous pouvez là aussi prendre place. Voilà.

notes

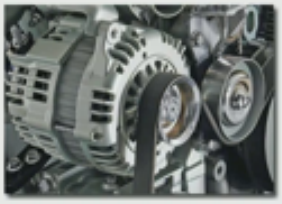
résumé

1.1.4 Histoire - mécanique

EPFL



- **Mécanique** (grec "$Μηχανικη''$)
  - **Equilibre** (statique)
  - **Mouvement** (dynamique)
  - **Déformation**

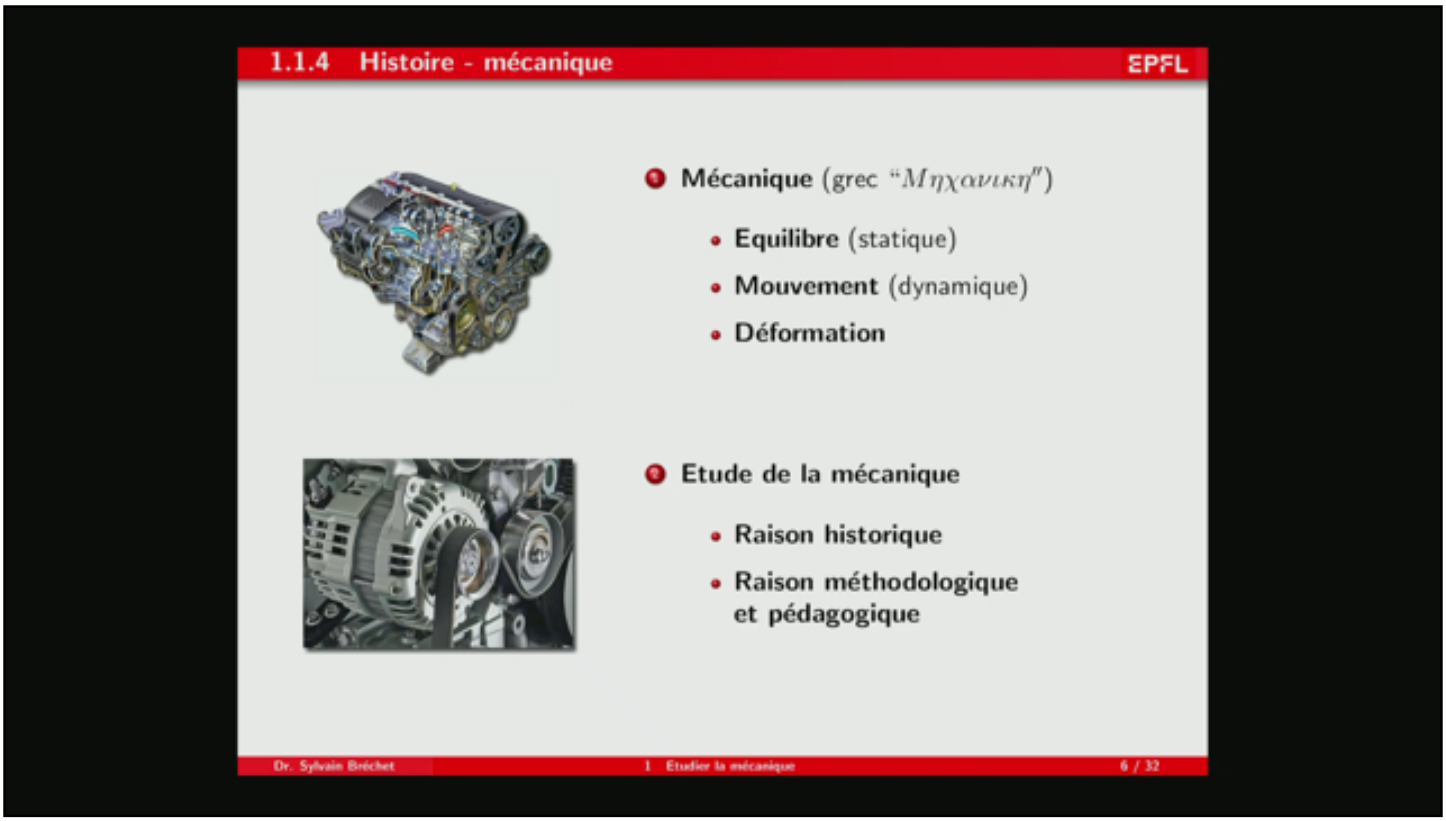


- **Etude de la mécanique**
  - **Raison historique**
  - **Raison méthodologique et pédagogique**

notes

résumé

9m 22s



également s'intéresser au phénomène passionnant de la résonance avec des applications époustouflantes, vous en aurez une dans quelques instants, d'accord ? La huitième semaine, on fera de la physique sociale, puisque la physique était une physique d'autiste, d'un point de matériel tout seul dans l'univers, d'accord ? Ensuite, on va faire interagir ces points matériels avec la loi d'action et de réaction qui va nous permettre de décrire les collisions. Et puis, la neuvième semaine, on introduira la notion de moments cinétiques, de moments de force pour pouvoir traiter la loi de la gravitation universelle. Et on va adopter ensemble une démarche qui éproche le sel que le grand Newton a lui-même adopté pour découvrir cette loi, d'accord ? La dixième semaine, vous verrez les systèmes de masse variables, d'accord ? Et on parlera ensemble du mouvement relatif qui se décrit dans des référentiels d'accélérer. C'est là que des mots que vous avez peut-être déjà entendu comme la force centrifuge, la force de coriolisse, d'accord ? On va intervenir dans la description. Pour l'instant, il ne faut pas s'y intéresser, ça viendra bien assez tôt, ne vous inquiétez pas. On verra également que le mouvement de la dynamique à la surface de la Terre, lorsqu'on tient compte de la rotation de la Terre autour de son axe, est un mouvement relatif. Et on peut mettre en évidence la rotation de la Terre sur son axe, en regardant le mouvement d'un pendule, d'accord, du plan de situation d'un pendule au conductin. C'est le fameux pendule de Foucault, dont on parlera au chapitre XI. On verra également comment on peut, grâce à ce mouvement relatif, expliquer des phénomènes passionnants, comme les bases de la météo, d'accord ? On étendra notre discussion un système de pends matériel, et lorsqu'on aura fait ceci, on sera alors en mesure de passer, je dirais, au dessert de secours, être s'intéressé à la dynamique et à la

notes

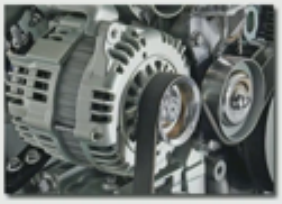
résumé

1.1.4 Histoire - mécanique

EPFL



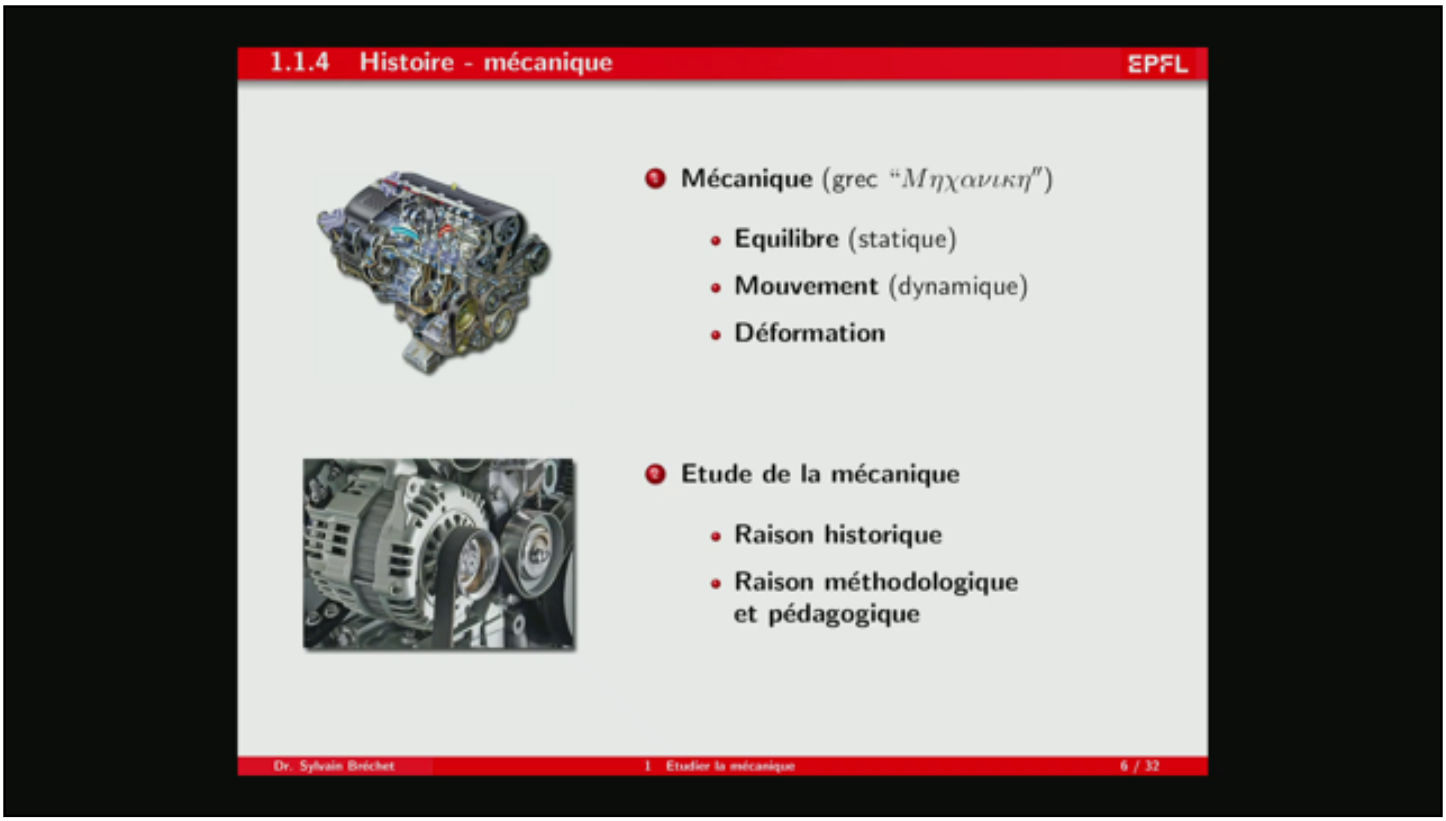
- **Mécanique** (grec "$Μηχανικη''$)
  - **Equilibre** (statique)
  - **Mouvement** (dynamique)
  - **Déformation**



- **Etude de la mécanique**
  - **Raison historique**
  - **Raison méthodologique et pédagogique**

notes

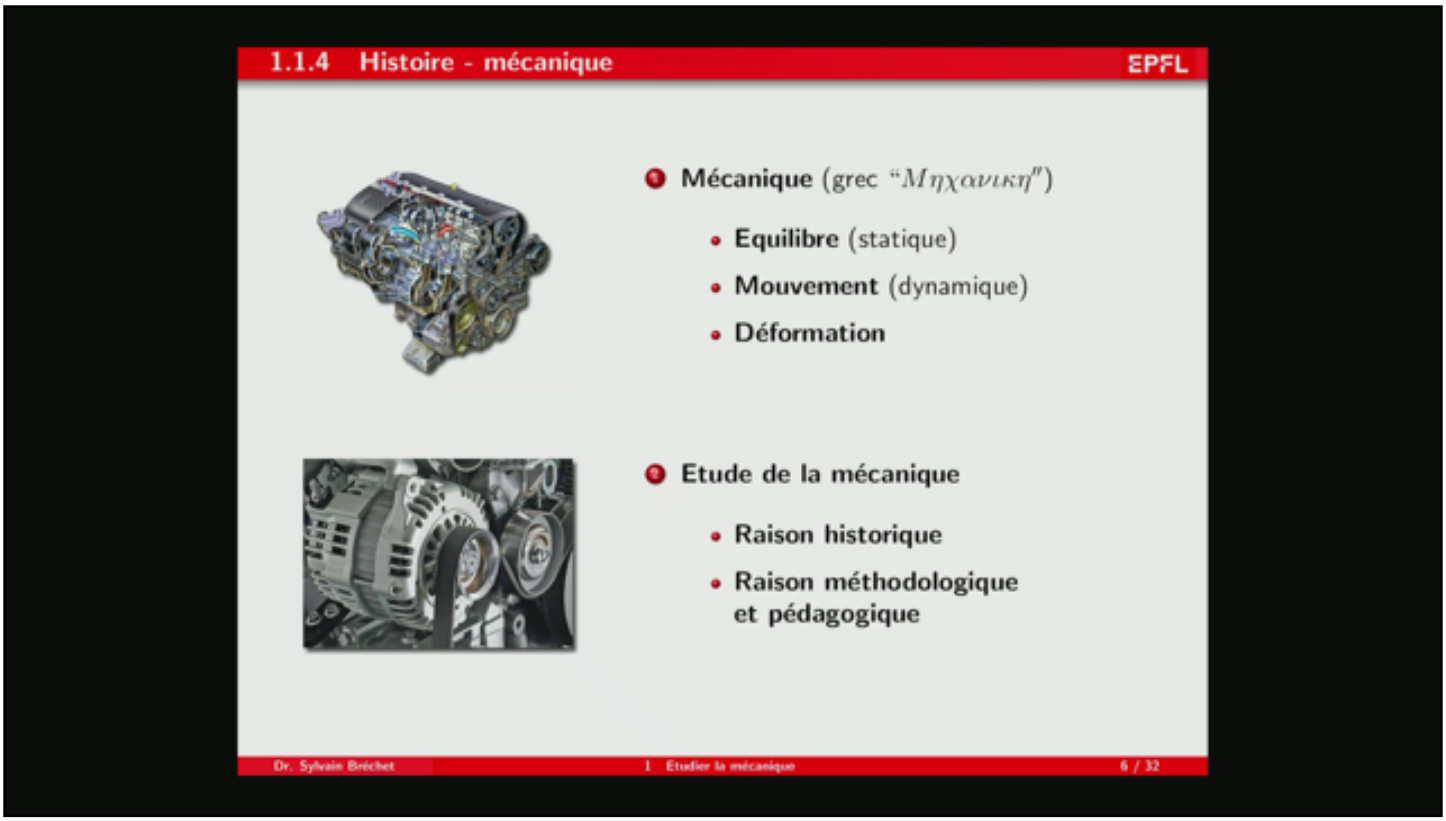
résumé



interprétation de type ingénierie. On aimerait faire fonctionner pratiquement une machine, une machine comme par exemple ce moteur thermique, même si celui-ci est en train de devenir gentiment dézué, surtout après la décision pris par l'Union Européenne, de les bannir dans quelques années. Cela dit, lorsqu'on regarde la mécanique, il y a si vous voulez trois branches de la mécanique grosso modo, il y a la branche de la mécanique qui étudie les états d'équilibre, on parle de statique, on va s'y intéresser un tout petit peu, mais ce à quoi on va vraiment s'intéresser c'est l'étude du mouvement, la dynamique. Puis on parlera un tout petit peu de la déformation, si vous prenez un ressort par exemple, vous tirez légèrement sur le ressort, lorsque vous le relâchez il va reprendre sa position initiale. On a une déformation élastique, la déformation n'est pas irréversible, c'est réversible, vous revenez en arrière. En revanche, si vous prenez votre ressort sur tout ce qui est assez mou, vous tirez suffisamment dessus, lorsque vous le relâchez, il va prendre une position, c'est-à-dire que l'état final du ressort va être déformé par rapport à l'état initial. Donc là, il y a une irréversibilité, il y a une déformation plastique dans la matière dont on ne va pas parler, puisque c'est assez compliqué à traiter sur le plan mathématique. On peut le faire, mais ça dépasse le cas de secours. Bien maintenant, la deuxième question, pourquoi est-ce qu'on commence l'étude de la physique par la mécanique ? Il y a une raison historique à cela, si vous prenez les perfondateurs de la science moderne, prenons par exemple Kepler, Newton et d'autres, qu'est-ce qu'ils ont fait ? Ils se sont intéressés au mouvement des astres dans les cieux. Ce mouvement des astres, c'est la base même de la mécanique. C'est ce qui avait de plus intuitif, ce qui avait de plus évident. S'ils ont fait ça à

notes

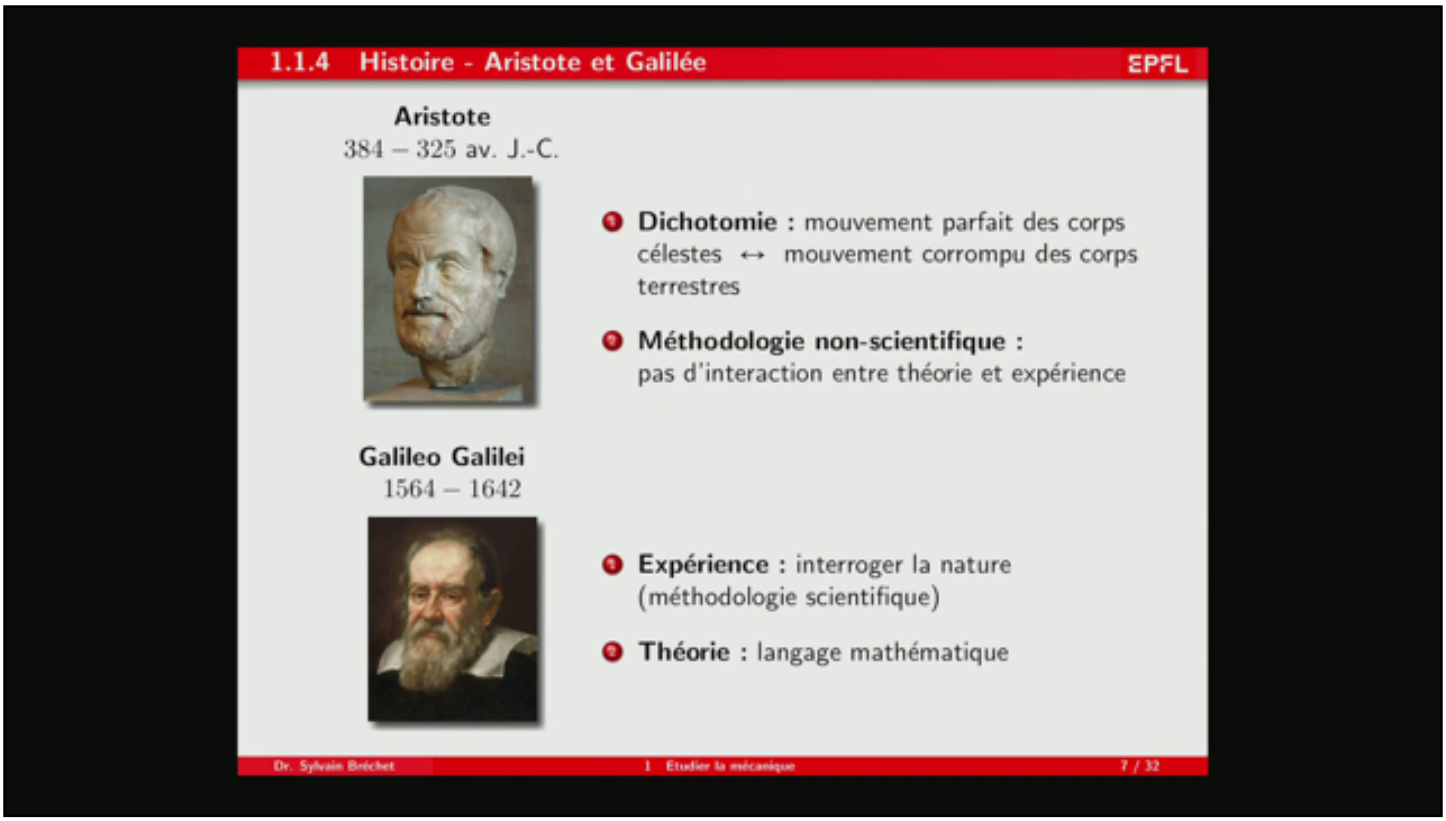
résumé



l'époque, il y avait bien des raisons à cela, et donc on va s'en inspirer et faire pareil. Et puis il y a une raison pédagogique qui est directement liée à la raison historique, le fait que les phénomènes qu'on voit en mécanique sont très intuitifs, on peut se les représenter facilement. On tire sur un sort, on relâche, on a un pendule qui aussi. On peut regarder ce qui se passe, lorsqu'on a un objet qu'on va lancer en l'air, si je prends par exemple une craque, je la lance, vous imaginez tout ce qu'il y aura un mouvement, une trajectoire qui sera décrite par une parabole. Tout ça, c'est assez clair, c'est facile à modéliser, enfin, ça dépend, mais c'est plus facile à modéliser, disons,

notes

résumé

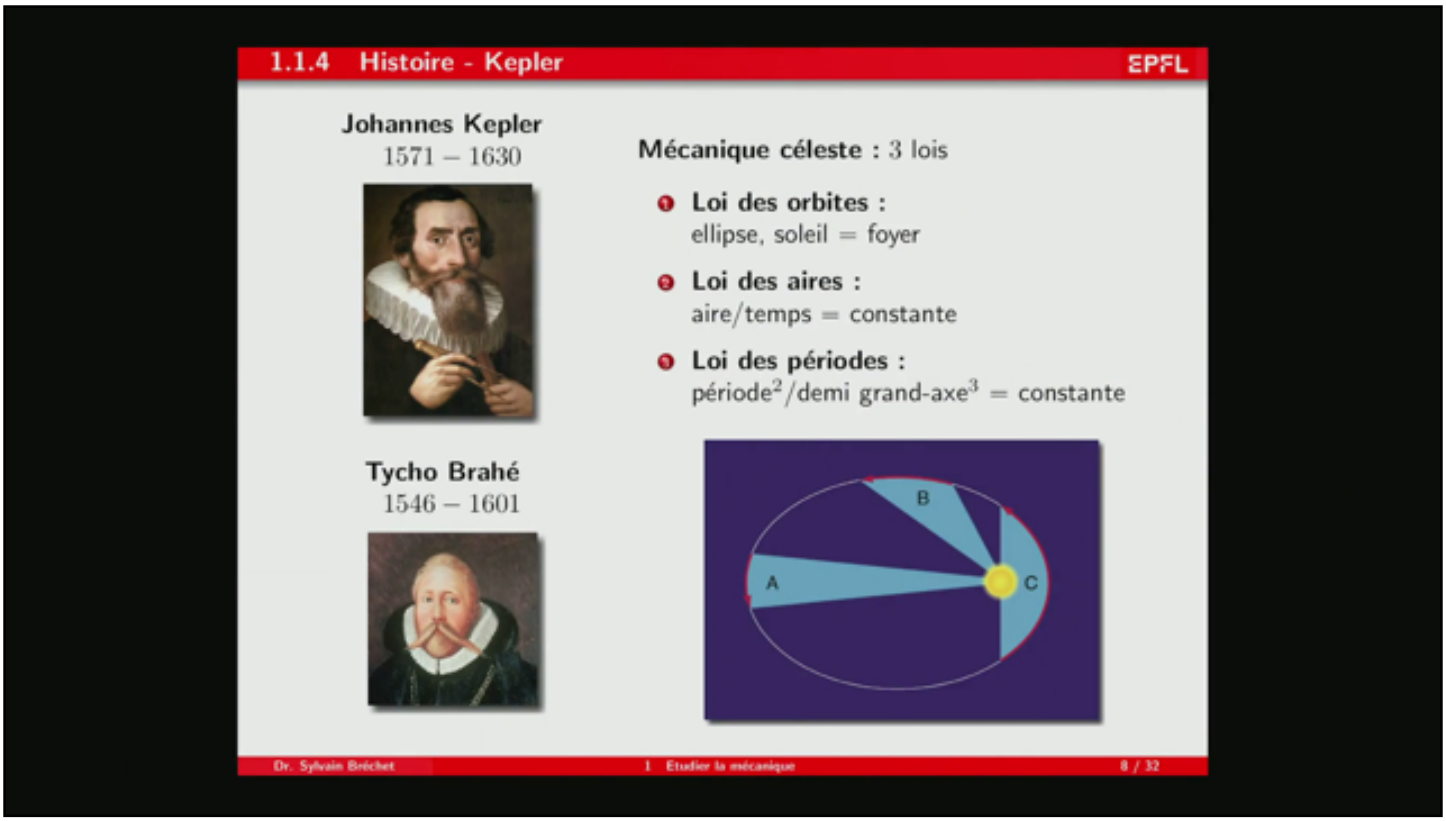


que d'autres phénomènes, comme par exemple l'électromagnétisme, qui sont nettement plus abstraits, d'accord, nettement moins intuitifs, mais avec des équations qui sont d'autant plus belles au niveau mathématique derrière. Bref, on va commencer parce qu'il y a plus simple, donc on va commencer par la mécanique. Au cœur même de la mécanique, la physique en général, le concept essentiel, c'est le concept de loi. C'est quoi une loi ? C'est une relation de cause à effet, d'accord ? C'est relation de cause à effet et elle est décrite dans l'engagement des mathématiques, et c'est pour ça que c'est essentiel de comprendre les mathématiques. Alors je le dis chaque année, je vais me répéter cette année encore, je n'ai qu'un regret, c'est de n'avoir pas fait suffisamment de mathématiques, d'accord ? Donc c'est important de faire des maths, vous ne pouvez jamais en avoir fait assez. C'est l'outil par excellence pour tout comprendre, d'accord ? Que ce soit l'ingénierie, que ce soit la finance, que ce soit la statistique, que ce soit un modèle de population, c'est vraiment l'outil de la logique, c'est l'outil de la non-contradiction.

notes

résumé

17m 13s



Alors, revenons maintenant un petit peu en arrière, revenons au temps des grecs, au IVe siècle avant notre ère. Parlons un tout petit peu d'Aristote, Aristote était le disciple de Platon, d'accord ? Platon a basé sa philosophie sur la dichotomie entre le monde des idées, le monde idéalisé, le monde parfait, d'accord ? Le monde mathématique, si vous voulez, d'une certaine manière, d'accord ? Une dichotomie donc contre ce monde-là, et le monde réel, le monde corrompu, le monde contagiant dans lequel on vit, d'accord ? Alors, cette dichotomie philosophique présente chez Platon a évidemment transpiré dans les travaux de son disciple, d'Aristote qui a piqué ceci à l'étude de l'univers qui nous entoure, d'accord ? Et donc, Paulie s'est dit que la dichotomie se retrouve entre le mouvement parfait des astres dans les cieux et le mouvement corrompu, le mouvement pas fiable, d'accord ? Des corps terrestres à la surface de la Terre, d'accord ? Donc clairement, pour Aristote, si vous lâchez une pomme que vous la faites tomber, ça n'a strictement rien à voir et ça ne peut pas être mis en lien avec le mouvement, par exemple, de la Lune autour de la Terre, d'accord ? Ou un autre mouvement d'un astre dans les cieux, d'accord ? Pourquoi ? Parce que les mouvements qui se passent à la surface de la Terre sont sujets aux caprices des dieux du Panthéon, d'accord ? Donc si vous voulez, le problème de l'approche d'Aristote, c'est que Aristote n'a pas essayé de confronter la nature, d'accord ? Non, il a imposé à la nature ses pré-supposés philosophiques et ça, c'était une grave erreur, d'accord ? Il n'y a pas d'interaction possible entre l'expérience et la théorie, puisque la théorie est parfaite, l'expérience n'est pas fiable, d'accord ? Or, cette interaction, c'est dialectique entre la théorie et l'expérience, elle est centrale dans l'approche et la méthodologie scientifique, d'accord ? Donc c'est

notes

résumé

18m 19s

1.1.4 Histoire - Kepler

EPFL

Johannes Kepler
1571 – 1630

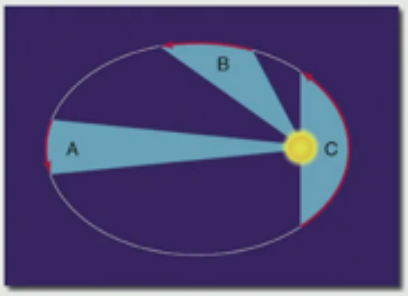


Tycho Brahé
1546 – 1601



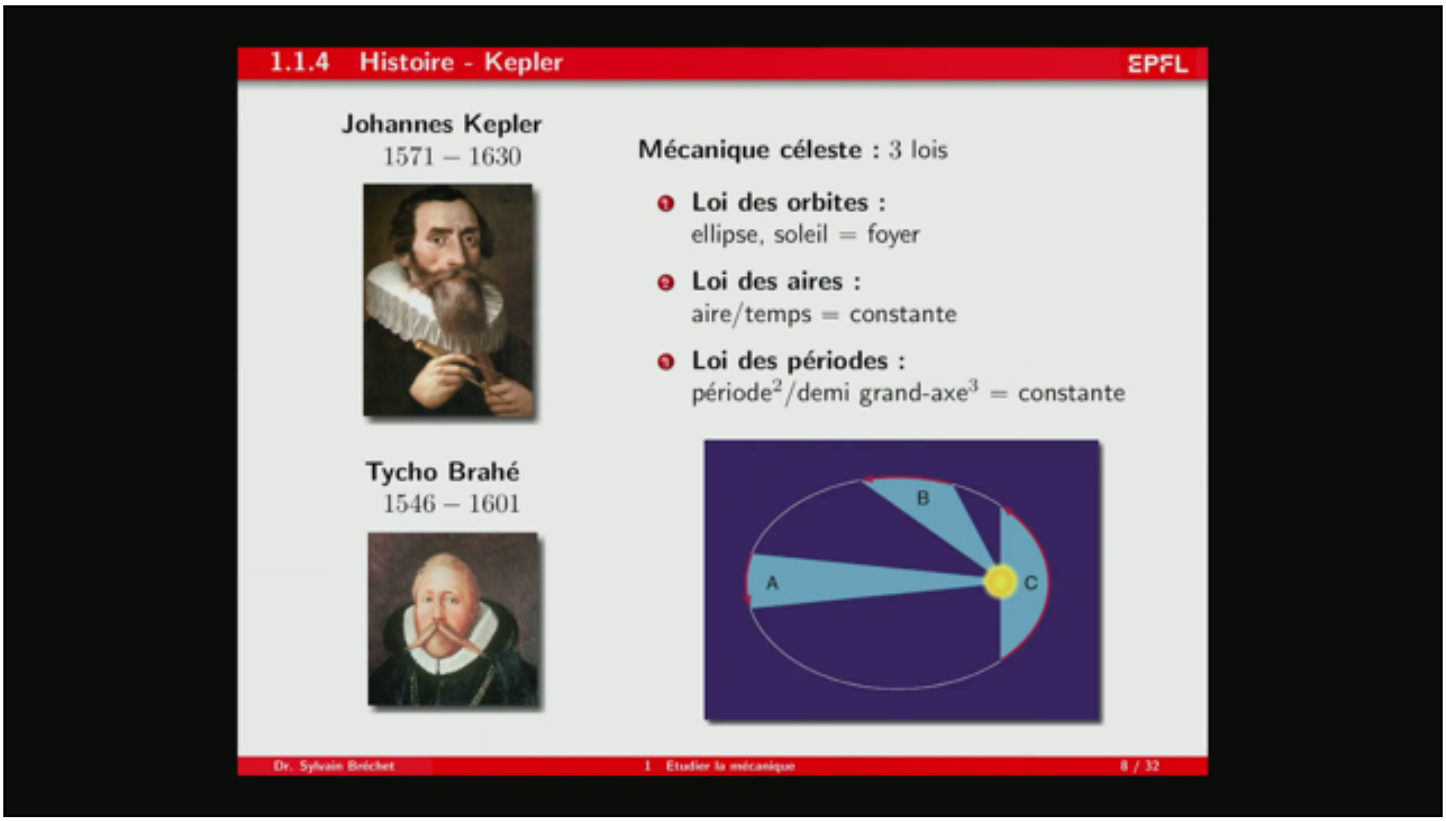
Mécanique céleste : 3 lois

1. **Loi des orbites :**
   ellipse, soleil = foyer
2. **Loi des aires :**
   aire/temps = constante
3. **Loi des périodes :**
   période^2/demi grand-axe^3 = constante



notes

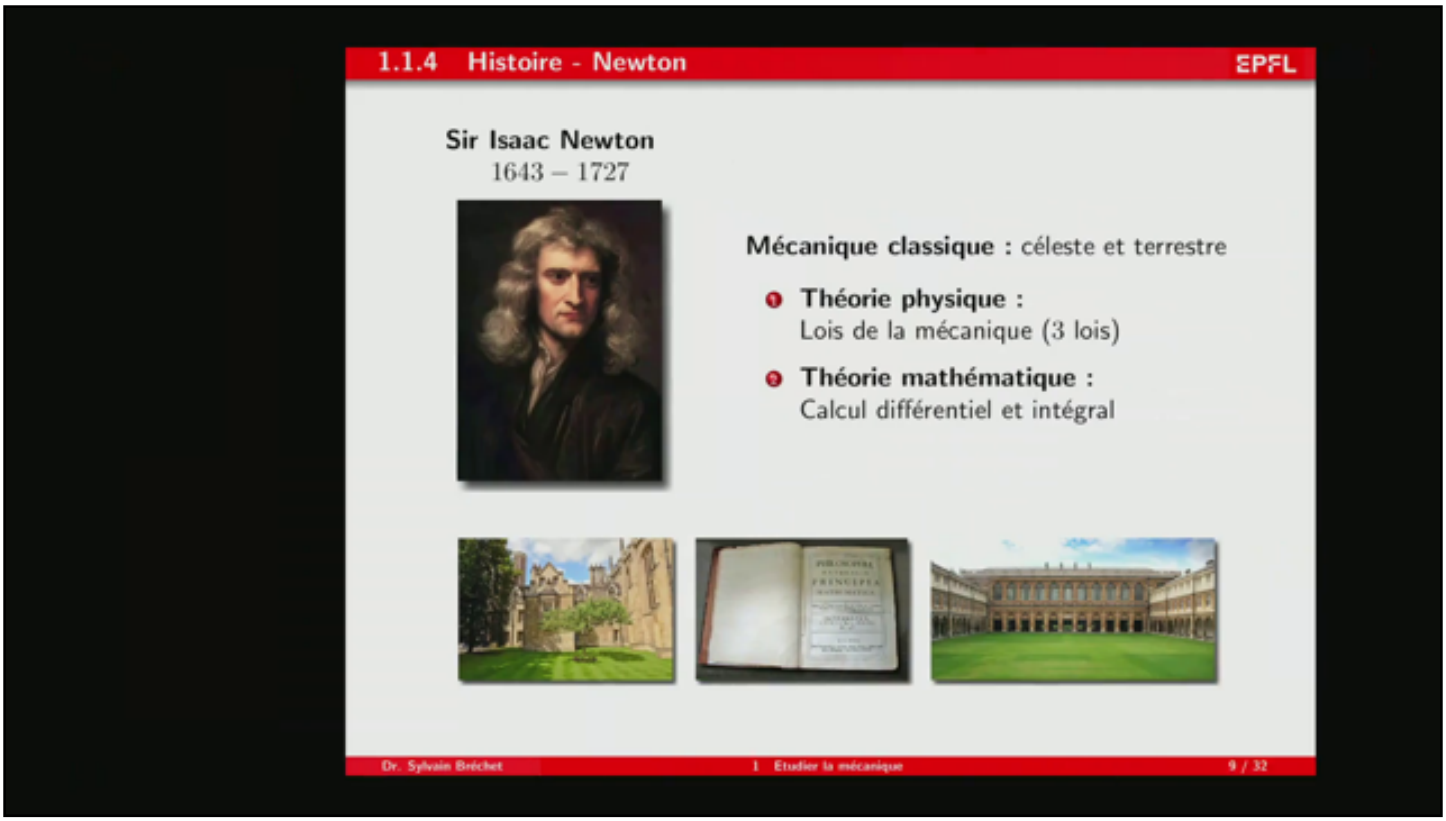
résumé



l'univers qui nous entoure.

notes

résumé

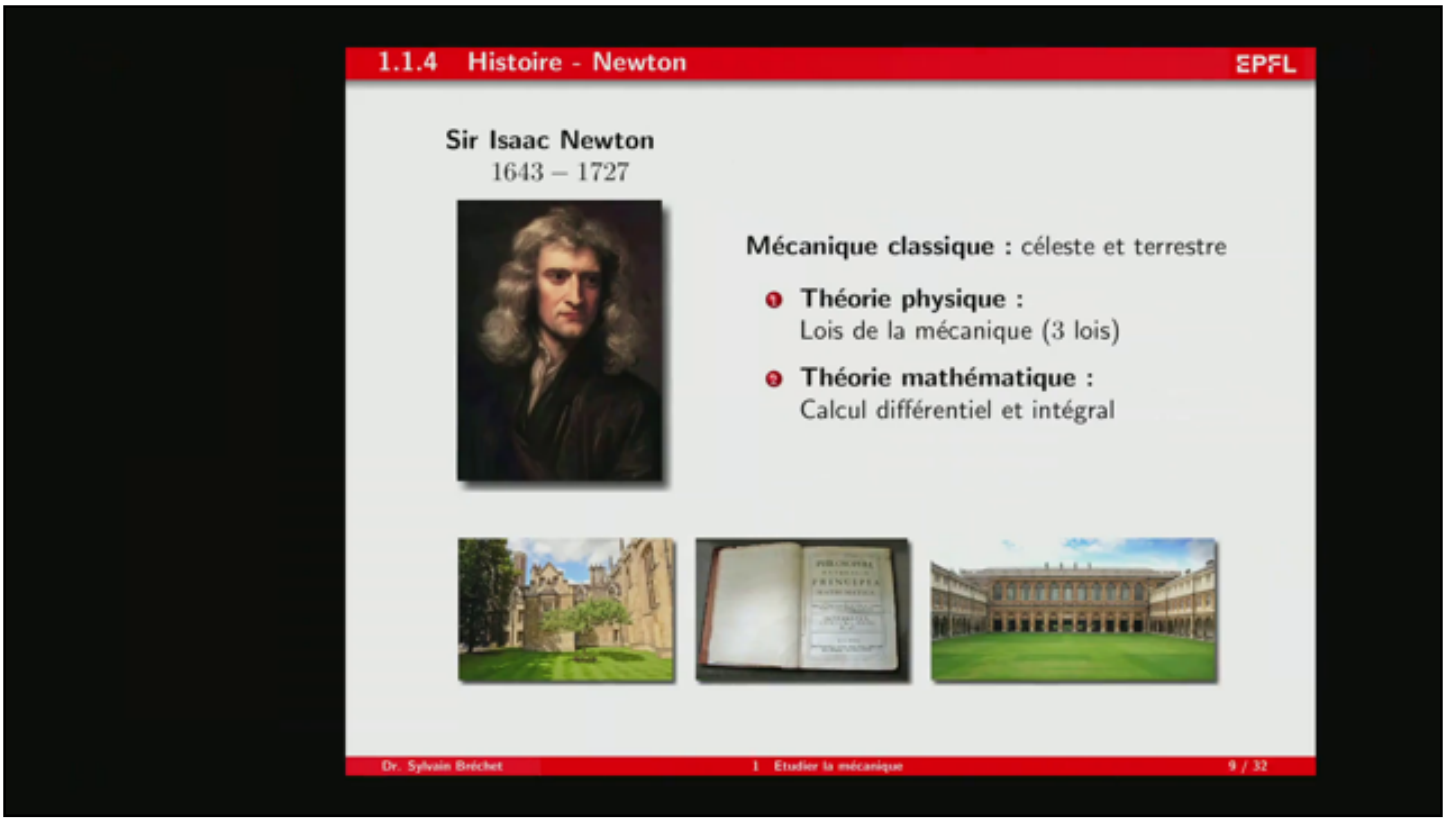


Galilée a montré que le mouvement naturel d'un corps est un mouvement qui a lieu en ligne droite à vitesse constante, d'accord ? Et Saint, c'était un trait de génie. Ça paraît évident pour nous aujourd'hui, ça l'était beaucoup moins l'époque, on n'en parlera plus en détail la semaine prochaine. Saint, c'était une attaque frontale du paradigme Aristotilécien parce que pour Aristote, il y a deux types d'État. Il y a l'état de repos et il y a l'état de mouvement. Si un objet est un mouvement forcément qui a une interaction extérieure, on parlerait de force aujourd'hui qui agit sur l'objet. Galilée dit non. Si le mouvement est un mouvement naturel, un mouvement à vitesse constante, il n'y a pas de force exercée sur l'objet. Et ça, c'était la clé du problème. Ensuite, en interrogant la nature, un contemporain de Galilée, Copernic, a compris que le modèle géocentrique était faux, que la Terre n'était pas le centre de l'univers, donc si on prenait le voisinage de notre univers, le voisinage local, ce qui est au centre, c'est le Soleil dans notre système solaire, évidemment que les planètes gravitent autour du Soleil. Alors c'est évident pour nous aujourd'hui, ça l'était beaucoup moins à l'époque. Il y a eu cette transition du paradigme géocentrique vers le paradigme éliocentrique. Alors ça a beaucoup intéressé un astronome de l'époque, un astronome d'anois, Ticobraé, qui a repéré de manière minutieuse le mouvement des planètes autour du Soleil. Et puis son assistant, qui lui avait une fibre de théoricien, on pourrait dire aujourd'hui de mathématicien, Johannes Kepler, a fait un modèle théorique basé sur les observations expérimentales de Ticobraé, son maître. Et il est arrivé à trois conclusions qui ont donné eu à trois lois. La première d'entre elles, c'est la fameuse loi dite des orbites. Si vous prenez une planète comme par exemple la Terre, dans son mouvement autour du Soleil, et bien son

notes

résumé

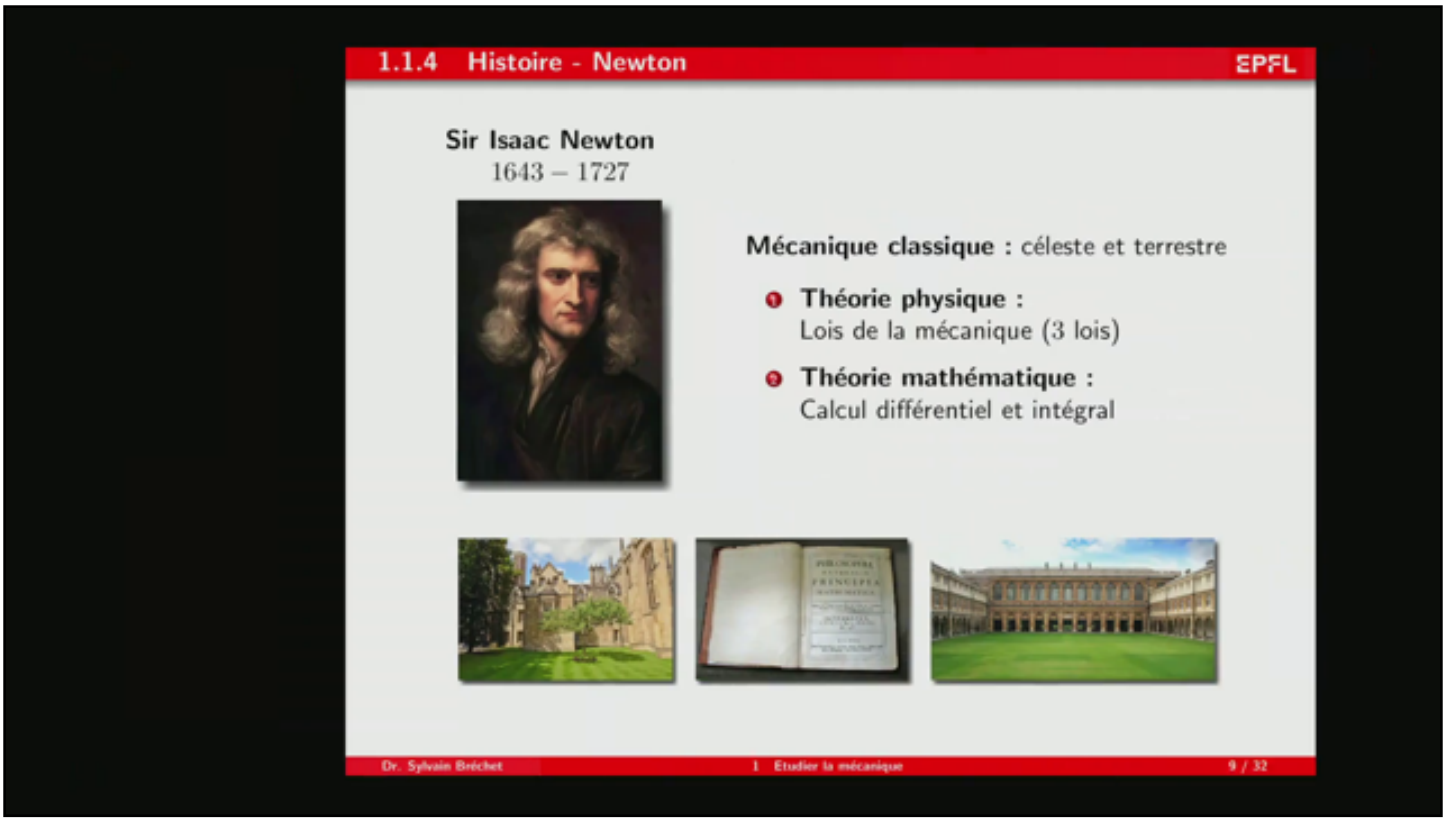
22m 18s



mouvement va se faire selon une trajectoire élyptique. On l'a tous entendu au lycée, au collège de gymnase, mais à l'époque c'était pas une évidence, pourquoi ? Parce que dans la logique d'un paradigme aristotélicien, le mouvement d'un astre dans le ciel devait être un mouvement parfait et donc la trajectoire devait nécessairement être circulaire. Et puis si vous regardez cette image, elle est trompeuse, je vais vous dire pourquoi. Le Soleil occupe l'un des foyers de l'ellipse, ça aussi c'était une révolution, elle n'est pas au centre. D'accord ? Alors il y a un deuxième foyer qui est symétrique. Maintenant si vous regardez ce qu'on appelle l'excentricité de l'ellipse, vous divisez, vous prenez le rapport disons de la distance qui sépare les foyers, que vous divisez par le grand axe. Et vous avez, à vue d'œil, à la louche, d'accord ? Une valeur qui est à peu près égale, à 3 quarts, 75%. D'accord ? Grosso modo. Alors maintenant, si vous regardez les orbites des planètes autour du Soleil, l'excentricité, elle n'est pas de 75%, elle est de quelques pour cent. Si je vous donne une orbite elliptique avec une eccentricité de quelques pour cent, les deux foyers sont très très proches. Suffisamment proches d'ailleurs pour qu'à l'œil nu, si vous regardez la trajectoire, vous ayez l'impression que cette trajectoire est un cercle, ce qui a rendu le jeu d'autant plus complexe. Et donc il fallait que les travaux de Ticobrai soient très très minutieux, et derrière il fallait que qu'ils plairent et confiance dans la qualité des résultats Ticobrai. Donc à sa place, j'aurais pris ceci pour une erreur de mesure et j'en aurais compris que la trajectoire était circulaire, la physique se serait arrêtée là. D'accord ? Non, non. Que pleurs étaient-tu ? Et il avait raison d'être, puisque ceci a conduit à cette loi remarquable des orbites. Il y en a une autre qui est la

notes

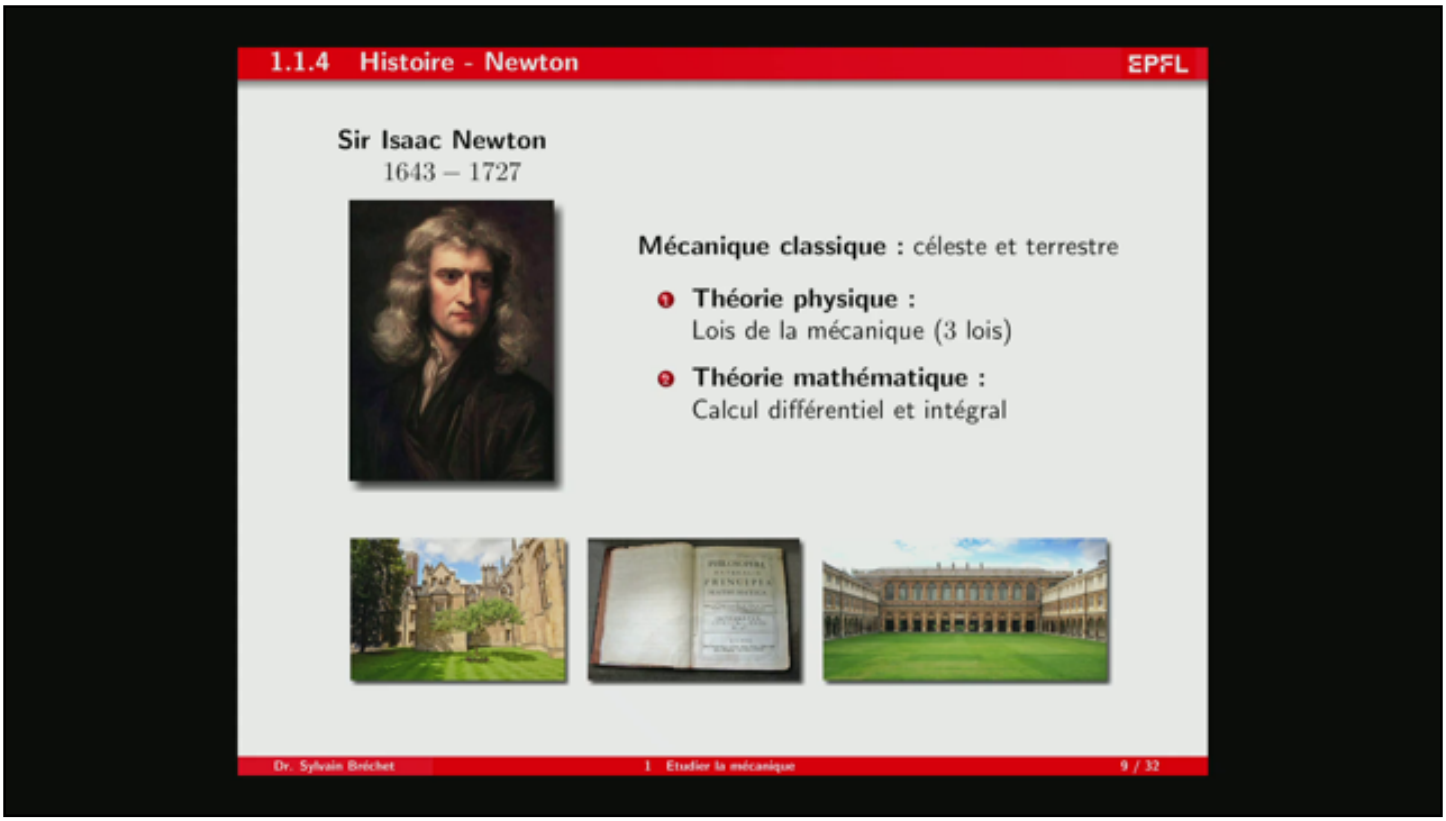
résumé



loi des airs. Alors pour ce faire, il faut imaginer que le plan du système solaire qui est ici est, disons, un parbrisse de voiture, d'accord ? Et vous imaginez maintenant que vous avez un essuie glace télescopique qui est ancré au niveau du Soleil et dont l'extrémité pointe sur la planète, par exemple, sur la Terre. Et comme il est télescopique, il va suivre la Terre dans son mouvement. Ce faisant, il va balayer la surface du parbrisse du plan du système solaire. D'accord ? Et vous avez des airs balayés, etc. Les voici. Et ce qu'affirme la loi des airs, c'est que l'air balayé par unité de temps est une constante. Et donc, si la planète est plus proche du Soleil, elle va se déplacer plus vite que si elle est plus éloignée pour que l'air balayé par unité de temps soit constante. Parle de vitesse aérolère. On en parle en détail au chapitre 9 de ce cours. D'accord ? La dernière loi qui est sortie à la loi des périodes, qui est absolument remarquable, puisqu'il a réussi à l'aide de points disposés sur une faille, à trouver que le carré de la période de rotation divisé par le cube du demi grand taxe devait être une constante. D'accord ? Et c'est ces trois éléments pris ensemble qui ont permis ensuite à Newton d'en dégager la loi de la gravitation universelle avec une force qui est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance.

notes

résumé

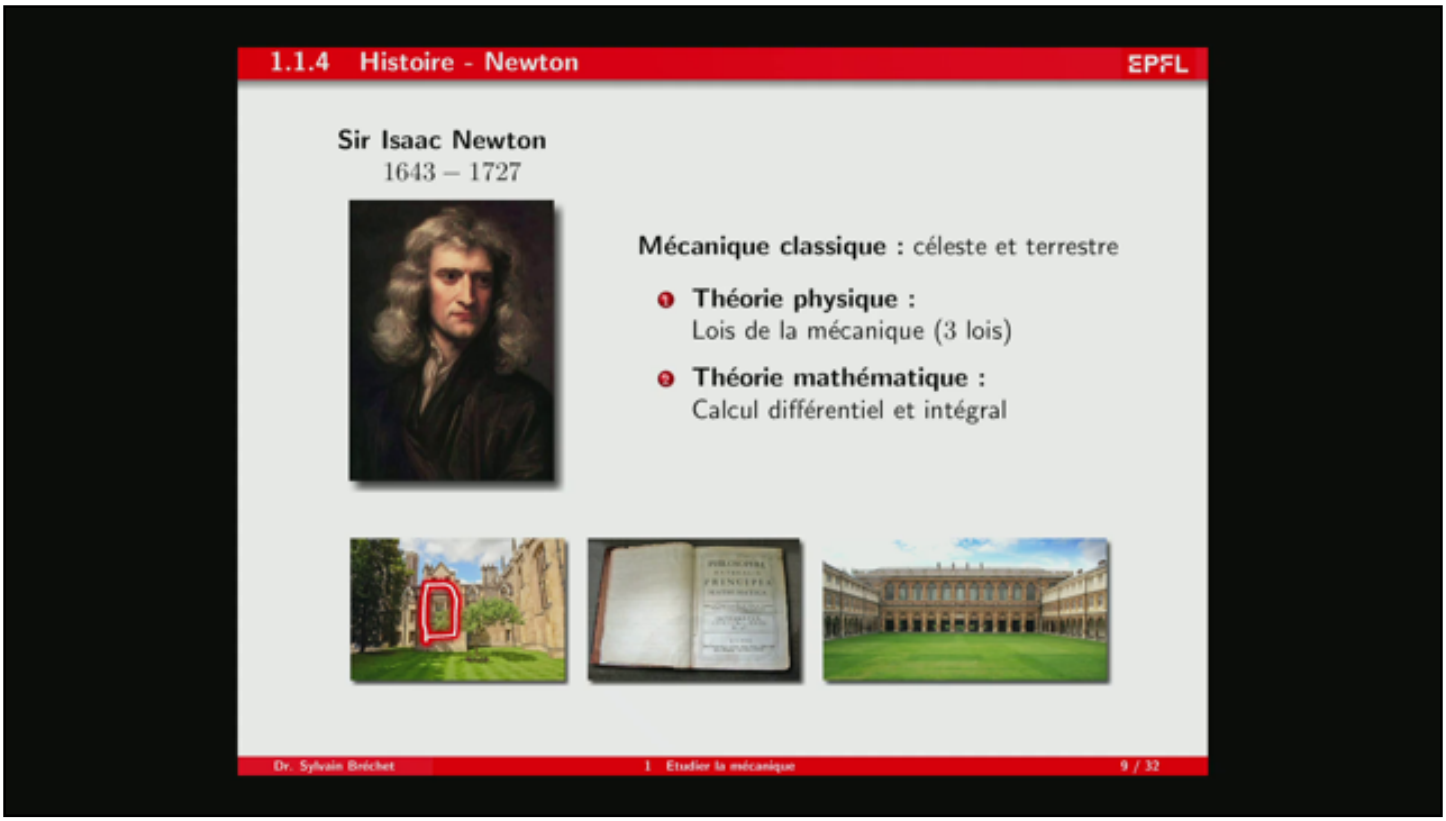


Alors justement, Newton parle en uns. Caffeine Newton. Newton, il a fait quelque chose de remarquable. Il a terminé le travail qu'a initié Galilée. Donc, dans un paradigme Aristotélicien, il y a une dichotomie entre la mécanique céleste et des expériences peu fiables qui auraient lieu à la surface de la Terre. Newton a compris que ce n'était pas le cas. Que le mouvement des astres dans les cieux devait être de même nature que le mouvement des corps à la surface de la Terre. Alors évidemment, quels aspects qui ont trait à la légende ? La légende veut qu'il était probablement assis sous un pommier. Ça pourrait être ce pommier-là, je vous dirais pourquoi dans quelques instants, et qu'une pomme lui serait tombée dessus. Et que là, il aurait compris que l'accélération que subit la pomme est de même nature, que l'accélération que subit la Lune autour de la Terre, seulement comme la Lune a une vitesse suffisante, elle tombe en permanence mais ne parvient jamais à tomber sur la Terre. Et donc, elle tourne, elle est satélisée autour de la Terre. Mais fondamentalement, le mouvement doit être le même et ça, c'était la clé de l'énigme. Donc il a réconcilié la physique dans les cieux et sur la Terre, et ça donnait lieu aux trois lois fondamentales de la mécanique céleste. Il a fait ceci dans son fameux livre intitulé Philosophier Naturalis Principia Mathematicale et principe mathématique de la philosophie naturelle. La philosophie naturelle, si vous voulez, est une description phénoménologique des lois de la nature. Et quand on parle de principe mathématique, on parle évidemment de modélisation mathématique de phénomène naturel. C'est exactement ce qu'on va faire ensemble.

notes

résumé

27m 41s

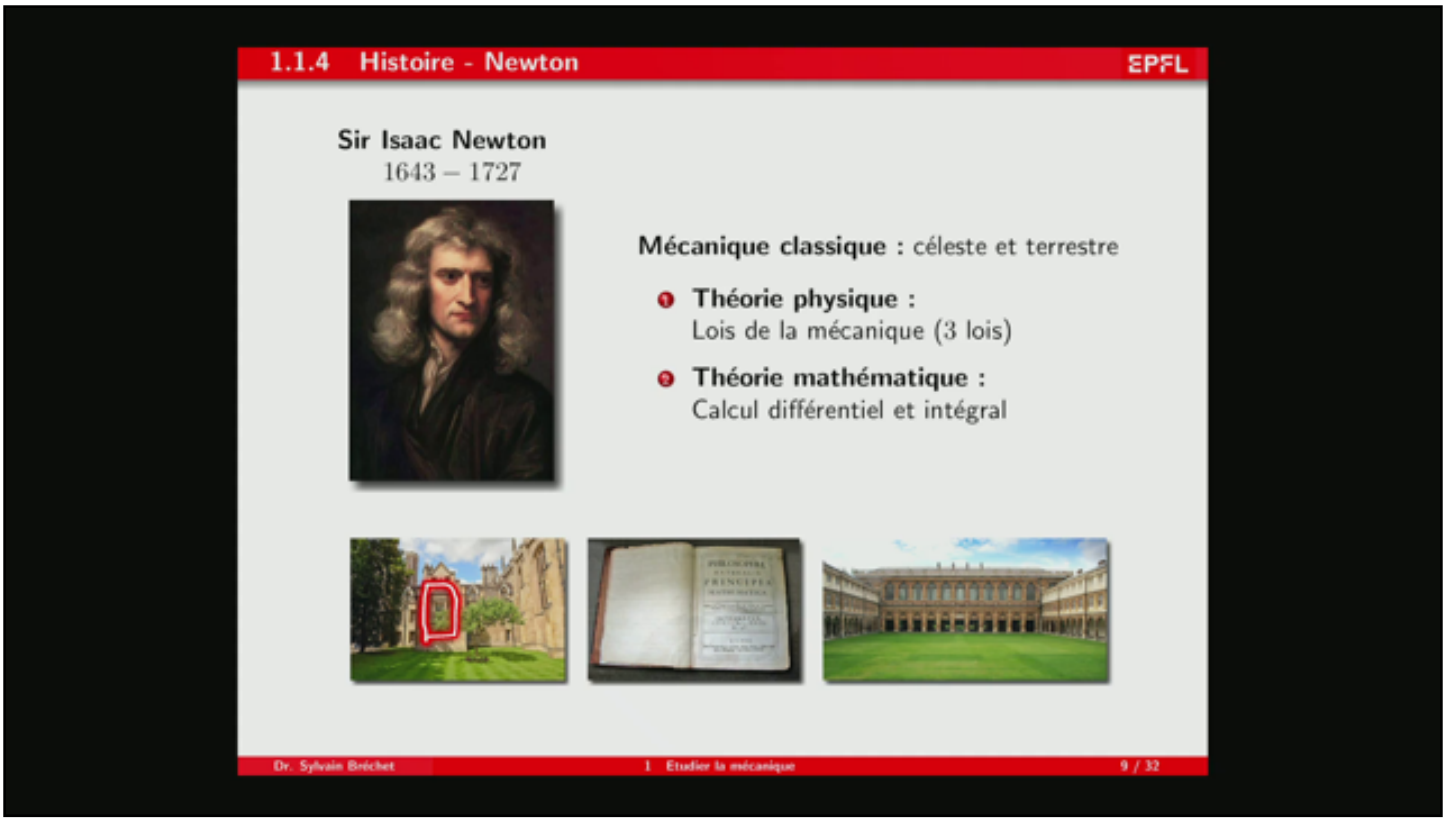


Alors, cet ouvrage qui a été écrit en latin par Newton, qui plus tard a été traduit par la marquise du Châtelet en français, Cet ouvrage contient donc une description de ces trois lois et on pourrait se dire qu'il doit quand même y avoir un certain nombre d'équations qui décrivent les lois et qui décrivent peut-être ce qui en découpe. Alors, qui d'entre vous pense ici que dans cet ouvrage, il doit y avoir, même s'il y a l'époque où il y avait moins d'équations écrite qu'aujourd'hui, il doit y avoir une dizaine d'équations. Levez la main. Il y en a un ou deux qui tentent. Ok. En fait, il y a moins d'équations que ça. Aussi étrange que ça puisse paraître. Il y a quand même trois lois qui pensent donc qu'il y a trois équations. Et c'est très économique. Une par lois, dans ce livre. Levez la main. Ah, il y a des gens qui sont timides. Ils ont raison de l'être, puisqu'il n'y a aucune équation. Dans les principales mathématiques, tout est écrit en termes de proportion. Tout est écrit de manière symbolique. Et en fait, c'est intéressant. Pourquoi ? Parce que si je vous écris une équation où vous connaissez tous, f est gal m a, ça ne veut strictement rien dire si vous ne savez pas ce qu'est m, ce qu'est a, ce qu'est f et comment l'éreux. Donc, la signification en physique des équations n'est pas simplement dans l'écriture symbolique mathématique. Elle est dans le sens qu'on attribue aux différents grandeurs qu'on utilise. Alors, Newton était confronté au problème suivant. Il a donc écrit des équations qui font intervenir par exemple des grandeurs et leurs variations au cours du temps. Typiquement la dérivée temporelle de la quantité de mouvement avec par exemple la quantité de mouvement. Alors, face à ce problème d'avoir des grandeurs et leurs dérivées temporelles qui apparaissent, il fallait résoudre

notes

résumé

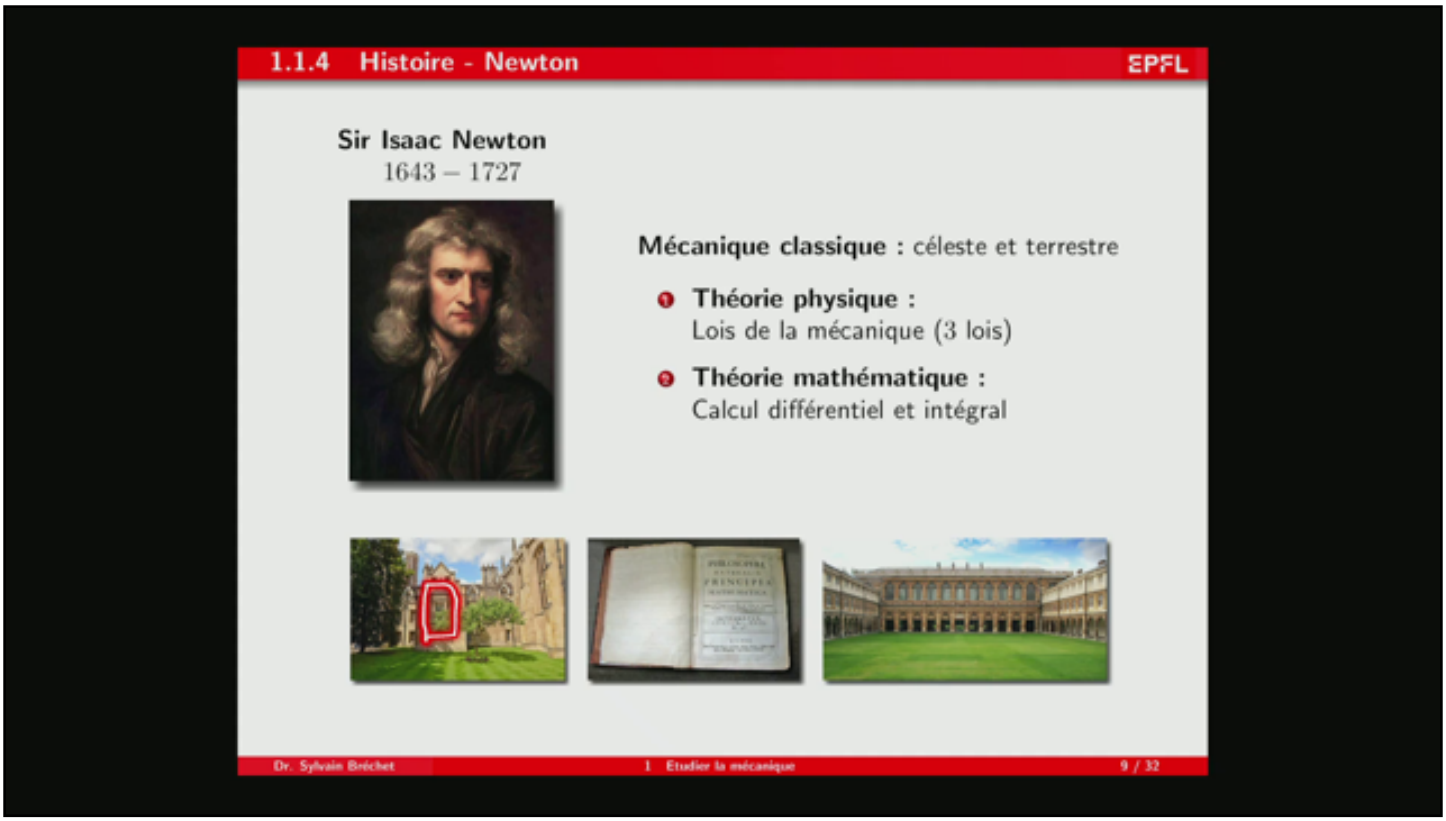
29m 27s



ces équations pour trouver la solution. Bon, alors, la solution n'existait pas. Kaffen-Newton, c'est simple pour Newton. Il a simplement inventé l'outil mathématique qui permet de les résoudre. Donc, il a posé les bases du calcul différentiel et intégral. Je veux dire qu'il l'a fait en parallèle avec Gottfried Leibniz, que vous connaissez probablement très bien ou surtout vous connaissez sa notation. Vous avez tous vu quelque chose qui ressemble à ça. Qui est le symbole intégral. C'est le vieux S allemand. C'est le symbole Somme. C'est une Somme continue. D'accord ? C'est la notation de Leibniz qui a été pérennisée non celle de Newton, mais Newton a aussi fait le travail. D'accord ? Et vu qu'on a eu le Covid il y a quelques années, je me permets quand même de mentionner que Newton a développé ces trois lois, les a découvertes durant un confinement, dû à la grande peste qui a sévue sur l'Angleterre à l'époque, donc comme quoi même le confinement peut avoir du bon. D'accord ? L'exemplaire des Principia Mathematica que vous voyez ici est un exemplaire que vous pouvez admirer si vous allez un jour à Cambridge. Vous avez ici la Ren Library du Trinity College, d'accord ? Et en intérieur vous avez au centre un meubles en bois, d'accord ? Avec un verre. Et dessous vous avez cet exemplaire original des Principia. Et ce que vous ne voyez pas c'est qu'ici à droite, vous avez une petite boucle de cheveux doré qui avait appartenu à Isaac Newton qui ressemblait un petit ange quand il était enfant. D'accord ? Newton avait l'habitude de se balader à travers le Trinity College, alors à l'époque il y avait de la terre battue. Et on demandait aux étudiants s'ils voyaient des pâtissines cabalistiques qui étaient, si vous voulez, tracées avec un bâton à même la terre, de ne surtout pas marcher dessus pour ne pas effacer l'héritage de

notes

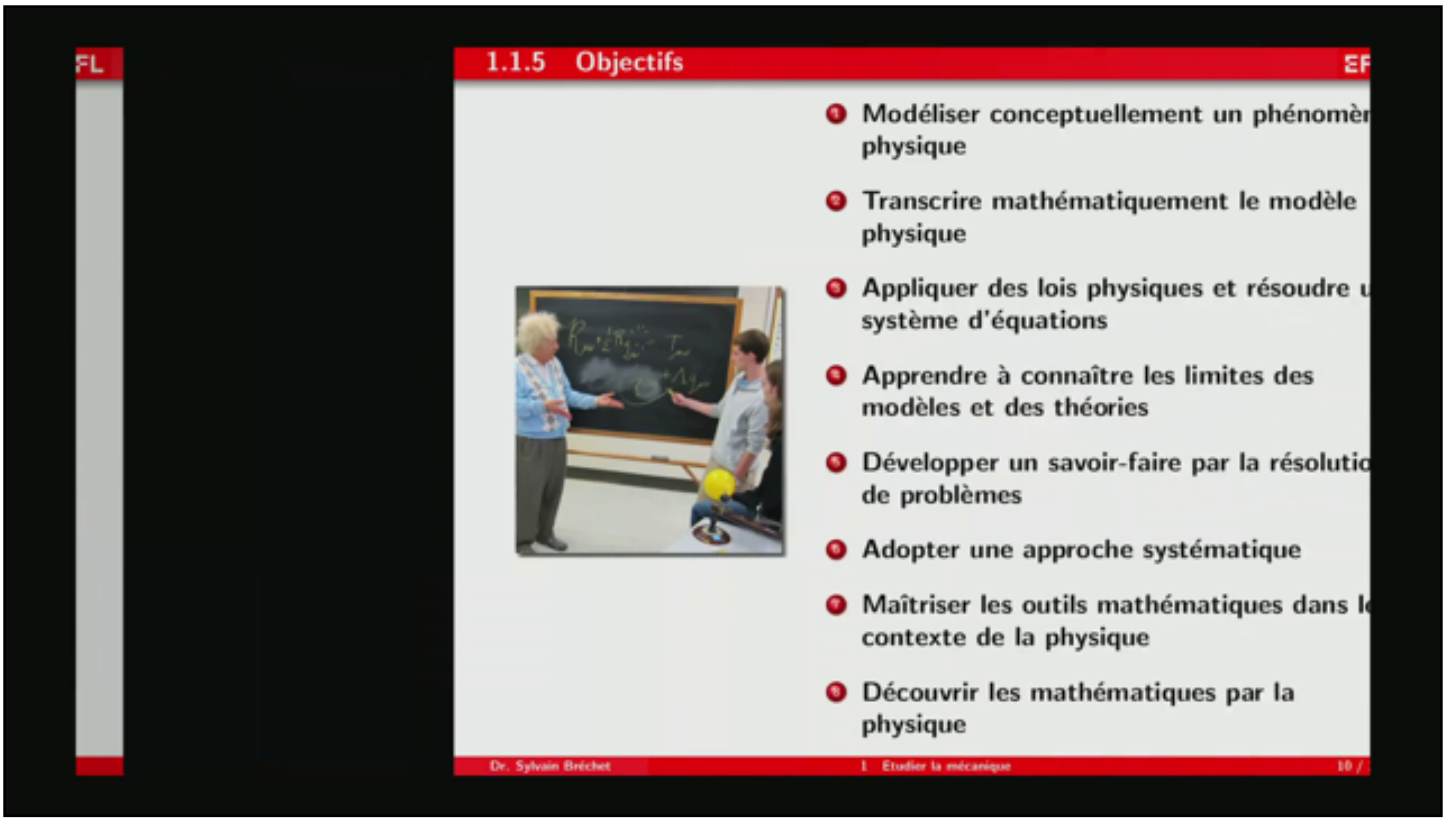
résumé



Newton, d'accord ? Donc là il fallait qu'il se déplace sur la plouze. Pourquoi je vous raconte ça ? Parce qu'aujourd'hui c'est le contraire. Vous n'avez pas le droit, si vous êtes étudiants, de marcher sur la plouze. C'est un privilège qui est accordé uniquement aux membres des faculty members, c'est-à-dire aux staff académiques, d'accord ? Est-ce que c'est tenable sur le plan physique ? Non. Bon, ça c'est une autre histoire, je pourrais vous raconter une anecdote à ce sujet, je vais faire vite. Une fois j'étais couché sur la plouze du Trinity College, il y a un portier qui vient avec son chapeau melon et qui me dit voilà, j'ai pas le droit d'être couché, c'était un beau jour d'été, j'ai pas le droit de le coucher sur la plouze. Et là je lui ai fait une petite théorie en disant que certainement comme lui il était debout, la pression qu'il exercait avec ses pieds était beaucoup plus grande que la pression que j'exerçais moi-même sur la plouze, donc il en dommageait beaucoup plus que moi. Il a pas voulu comprendre, j'ai dû lui me lever et quitter les lus. Bon, j'aimerais vous raconter une autre anecdote. Vous avez ici une chambre d'étudiants célèbres puisque c'est la chambre où avait séjourné Isaac Newton lui-même, d'accord ? Et la tradition veut que le meilleur étudiant en section de mathématiques, puisque c'est en mathématiques, dans le département de mathématiques et de physique théorique, d'accord ? Que se trouvent les meilleurs étudiants. Et donc c'est un étudiant mathématicien, celui qui a la meilleure note,

notes

résumé

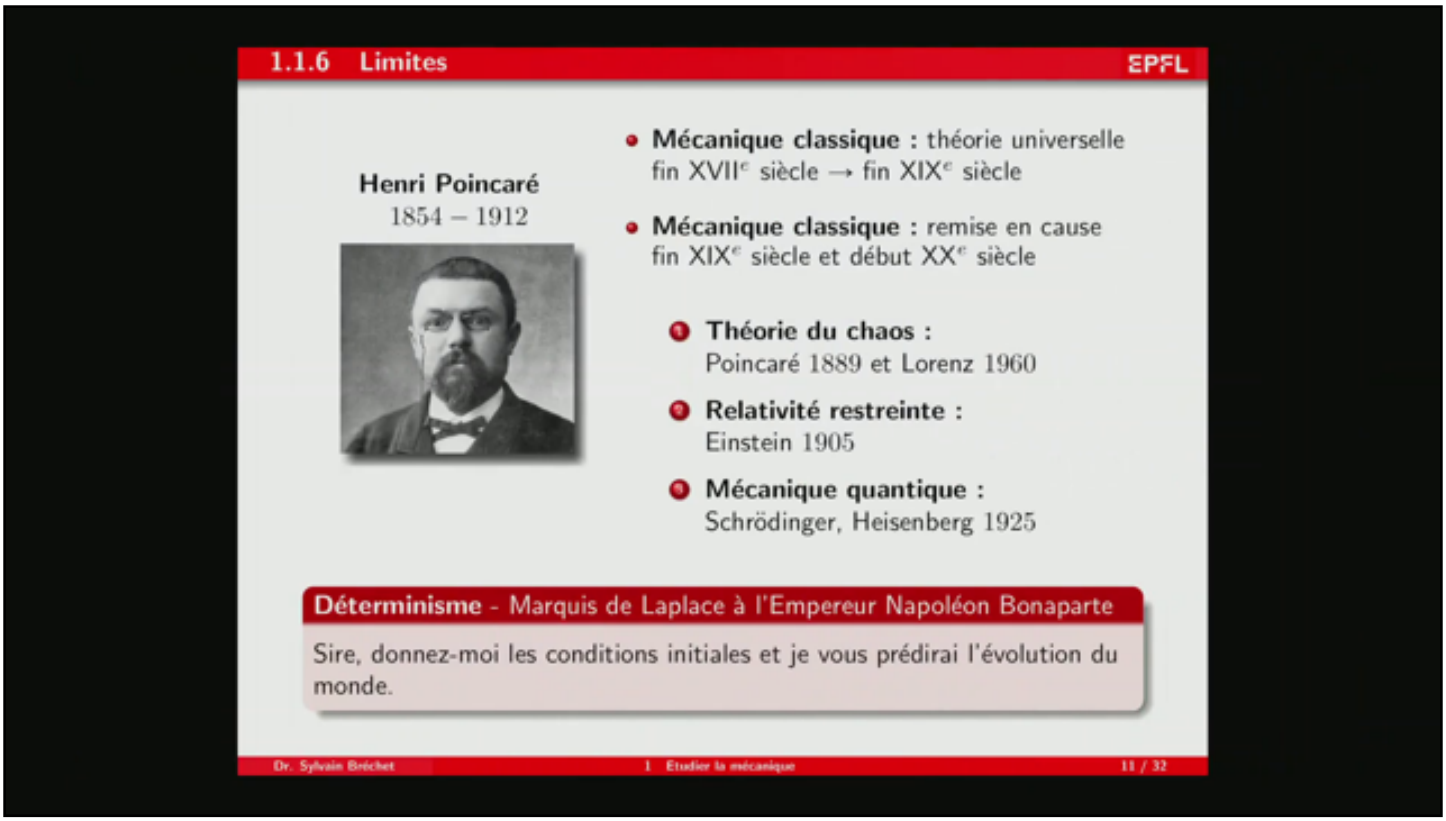


qui a le droit de choisir la chambre qu'il occupera la deuxième année et la tradition veut, qu'il occupe cette magnifique chambre qui donne justement sur l'âbre qui est ici. Évidemment que c'est pas le pommier de l'époque, mais c'est peut-être l'un de ses descendants qui sait, d'accord ? On n'a pas la réponse à la question, mais on peut l'imaginer.

notes

résumé

34m 25s

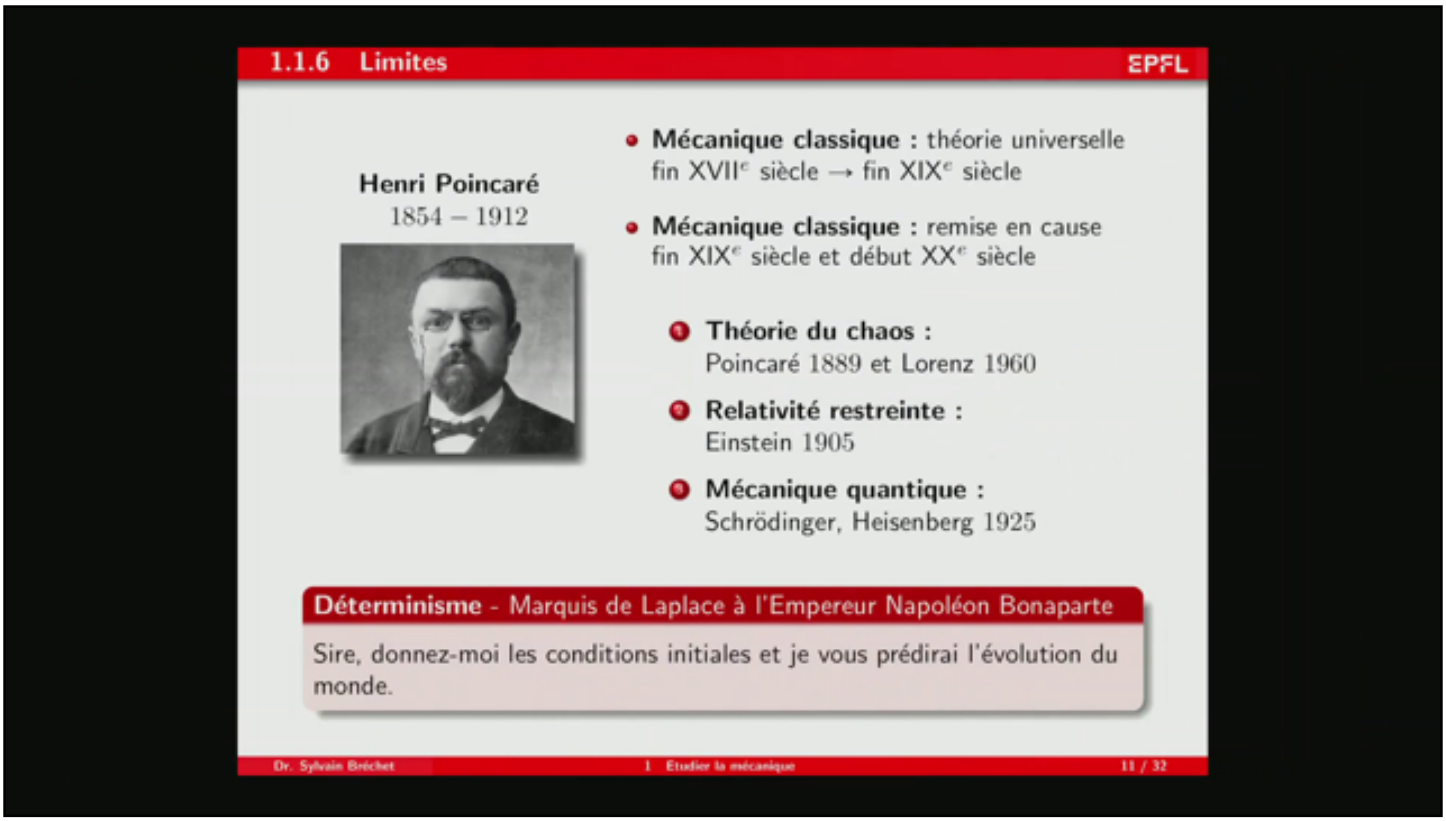


Voilà. Alors, j'aimerais vous parler un tout petit peu des objectifs de secours, d'accord ? Le premier objectif, c'est de modéliser conceptuellement un phénomène physique. Modéaliser, c'est idéaliser. Idealiser, c'est sacrifier, d'accord ? Il faut sacrifier ce qui est accessoire et se concentrer sur ce qui est essentiel dans un modèle. Alors c'est justement ça qui est difficile, c'est de faire la part des choses, d'accord ? De distinguer l'essentiel de l'accessoire, de savoir quand on peut par exemple négliger le frottement et quand on peut pas le faire, d'accord ? Et c'est tard, on va la prendre ensemble. Et c'est pour ça qu'il est utile et même indispensable de faire des exercices, d'accord ? Et de résoudre des problèmes. Donc il faut, pour pouvoir trouver les solutions d'un problème, transcrire mathématiquement le modèle physique qu'on a posé, d'accord ? Et ensuite il faut appliquer des lois physiques. Et ça, ça va donner lieu à des équations différentielles, dans un premier temps vectoriel, qu'on peut projeter sur des axes de coordonnées. On aura une série d'équations différentielles scalaires qu'il faudra alors résoudre, d'accord ? Peut-être dans un cas simple, puisque dans le cas général, c'est souvent difficile à faire, d'accord ? Donc c'est important de mettre l'ouvrage sur le métier, de faire les choses proprement, d'accord ? Et de résoudre ces exercices. Il ne suffit pas de regarder le corrigé en disant, j'y compris, d'accord ? Puisque l'examen, ça ne suffira pas, puisque vous serez face à des problèmes différents, mais similaires. Et donc il faut surtout, surtout pas apprendre par cœur. Soyez paresseux dans le bon sens, je me permets de le dire. Ce que je veux dire par là, c'est qu'il faut comprendre pour éviter d'apprendre. C'est ça le mot d'ordre, d'accord ? Et c'est ça qui nous sera utile par la suite, c'est votre compréhension plus en que la prise de sentissage. Si vous voulez apprendre par

notes

résumé

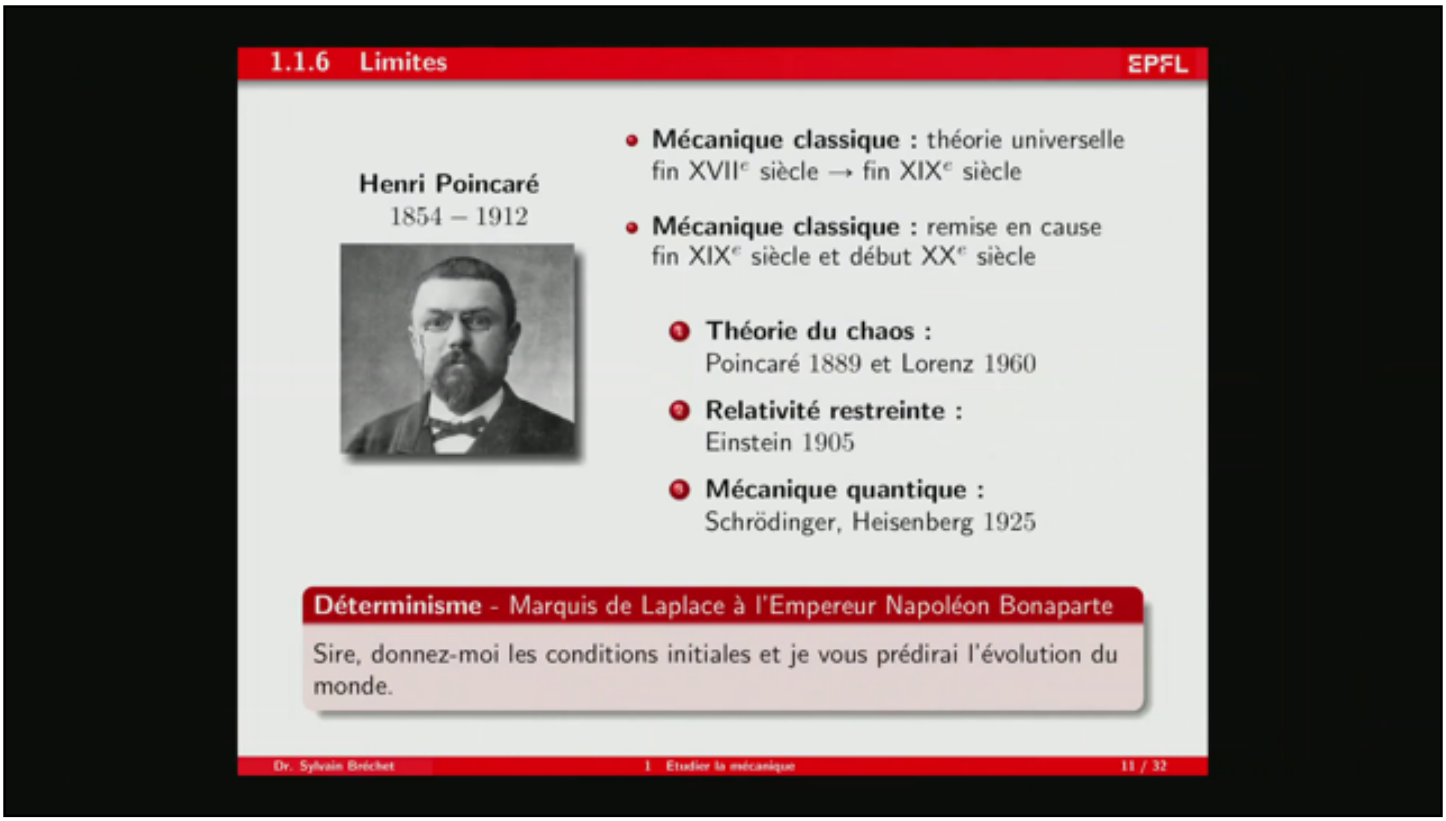
34m 40s



cœur ce qu'on vous enseigne, il y a de très bons cours qui se sont dispensés à quelques centaines de mètres de cet auditoire, d'accord ? Où là vous avez l'occasion d'apprendre les choses par cœur sans forcément les comprendre. Mais ici on essaye de faire le contraire, d'accord ? Voilà. Alors, il faudra apprendre à connaître les limites des modèles et des théories, d'accord ? Si vous avez une vitesse qui est très élevée, la physique classique, la physique Newtonienne, ne permettra pas d'écrire ce qui se passe, il faudra passer à une description relativiste. On ne va pas le faire ensemble, on n'aura pas le temps de le faire, d'accord ? Si vous voulez décrire un mouvement à toute petite échelle, celui d'un électron, d'accord ? Autour, par exemple, d'un noyau, un noyau donné par le proton, dans le modèle de l'atome d'hydrogène, eh bien la description classique ne suffira pas. Là il faut une description quand il n'en parlera la dernière semaine, d'accord ? Donc ce qu'on veut faire ensemble, c'est développer un savoir-faire. Le but, c'est pas de trouver l'astuce qui permet le plus rapidement d'arriver à la solution, même si c'est intéressant. Le but, c'est d'avoir une sorte de 4-4 physique, d'accord ? Un tout-terrain, une approche générale qui vous permet, dans la jungle de l'examen, de vous en sortir, d'appliquer des techniques connues en terrain inconnu, d'accord ? Pour arriver à la solution. Et donc vous verrez dans la structure même des corriger des séries d'exercices, vous avez un lite motif, une sorte de mantra, une approche systématique qui va transparaître, et c'est cette approche qu'il faudra maîtriser le jour de l'examen, d'accord ? Il faudra évidemment maîtriser un certain nombre d'utils mathématiques pour pouvoir résoudre des problèmes physiques. Alors parfois, il y a des outils mathématiques que vous n'aurez pas encore vus. Par exemple la résolution d'équation différentielle, vous allez la voir dans

notes

résumé



ce cours avant de la voir en maths. Il y a aussi des concepts comme le gradien qui seront introduits avant qu'elles soient au 2ème semestre en mathématiques. Ne vous inquiétez pas, je vais faire ceci gentiment avec vous, ça sera tout à fait compréhensible spécialement pour des mathématiciens, d'accord ? Et ça sera ludique d'ailleurs de voir ce qu'on peut en faire.

notes

résumé



Bien, la mécanique classique, la mécanique newtonienne, a triomphée durant environ deux siècles, d'accord ? Son universalité a été remise en cause, d'accord ? Même si son domaine d'applicabilité est toujours encore très important, voire immense, d'accord ? Son domaine d'applicabilité a été remise en cause à la fin du 19e siècle et au début du 20e siècle par trois grandes révolutions, d'accord ? Donc, on va parler après la pause, puisque j'aimerais maintenant passer la parole à quelqu'un qui va vous parler de quelque chose d'intéressant. Vous allez pouvoir dans cette classe faire, disons, être les cobets, d'une étude sur l'enseignement, d'accord ? L'enseignement dans le cadre des cours de physique. Donc je passe la parole à Stanislas Erkovich. Merci beaucoup.

notes

résumé

38m 36s

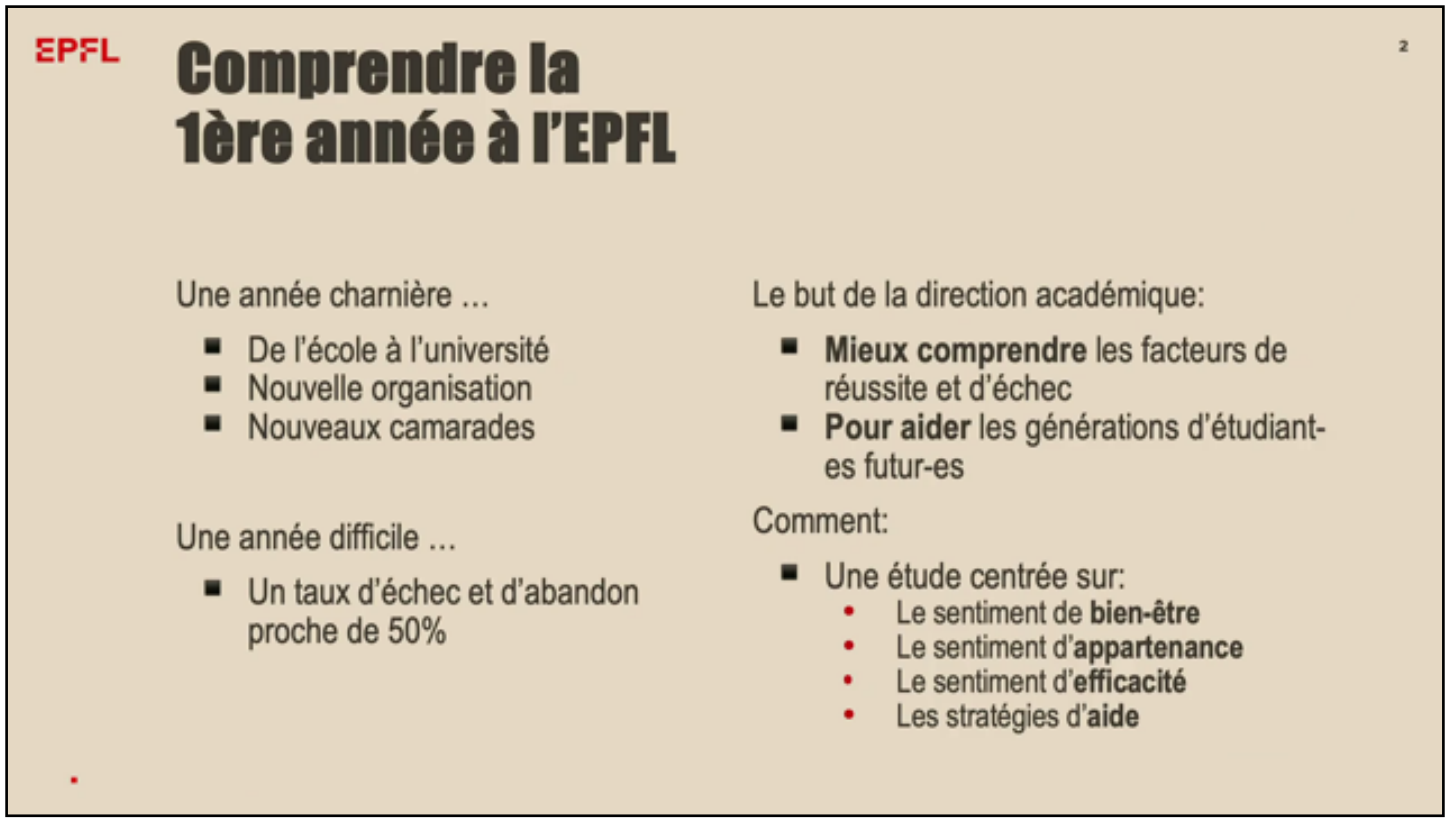


Merci. Parfait, merci. Donc il faut alors...

notes

résumé

39m 30s

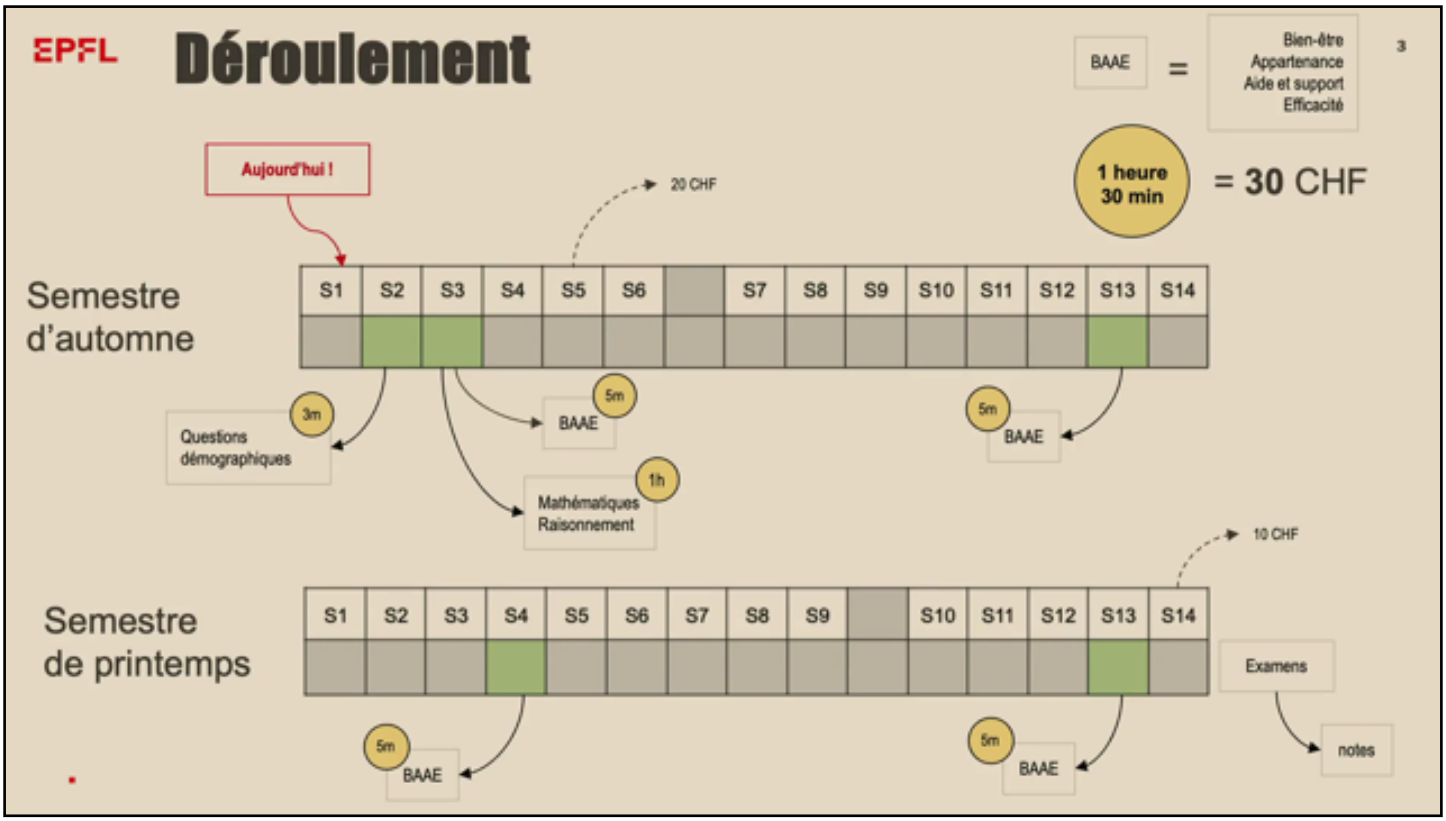


Bonjour à tous et à toutes. C'est seulement pour faire une petite présentation d'une initiative de la page de la vice-présidence académique. Ça s'appelle « Mieux comprendre la première année ». Vous avez déjà dû recevoir une email soit de SAC, soit de la vice-présidence académique, pour vous informer un petit peu sur ces dispositifs. Mais aujourd'hui, je vais mentionner seulement en cinq minutes cette petite présentation, l'idée générale.

notes

résumé

39m 47s



Et vous demandez si vous êtes intéressés. Donc bien sûr, il n'y a pas besoin de répondre maintenant. Donc l'initiative s'appelle « Mieux comprendre la première année à l'EPFL ». On sait que c'est une année très compliquée, très charnière. Il y a un taux d'échec malheureusement des hauteurs des 50%. Donc le but de cette initiative, c'est justement pouvoir comprendre un peu mieux le facteur qui intervient dans la réussite et dans l'échec. Et aider bien sûr les générations d'étudiants étudiants et futurs. Donc c'est une étude centrée sur ces quatre axes, donc les bien-être, l'appartenance, l'efficacité et les stratégies d'aide.

notes

résumé

40m 19s

Comment participer ?


Important 12 July 2024 at 10:09

Invitation à participer à une étude sur la réussite en première année à l'EPFL

To: patrick.jermann@gmail.com,

Reply-To: Patrick Jermann

Chèr·es étudiant·es,

Vous venez de commencer la première année et c'est pourquoi nous vous contactons. Nous menons une étudde pour mieux comprendre les facteurs qui influencent l'abandon des études et la réussite de la première année à l'EPFL.

Nous avons besoin de vous pour participer à l'étude !

L'étude commence par quelques questions démographiques et une série de questions sur votre niveau en mathématiques (~25 minutes) et un test de raisonnement logique (~20 minutes). Ensuite, quatre fois au cours de l'année académique, vous répondrez à un court questionnaire (5-7 minutes chacun). .

La durée totale que vous consacrez à l'étude est de d'environ une heure et quinze minutes. Vous recevrez 30 CHF pour votre participation à condition que vous terminiez l'étude dans son intégralité. Les paiements sont prévus à la fin de l'étude (au mois de mai) via CAMIPRO (la carte d'étudiant).

De plus amples informations sont disponibles dans la feuille d'information.

Pour participer, suivez ce lien: Abandons et réussite à la première année de l'EPFL.

Si ce lien ne fonctionne pas, essayez de copier le lien ci-dessous dans votre browser web:
https://redcap.epfl.ch/surveys/?s=oLcXZZjD8qKi8Nin

Ce lien est unique pour vous et ne doit pas être partagé avec d'autres.

Votre participation est très importante pour nous et permet à l'école d'améliorer son offre de formation.

Merci pour votre intérêt !
Patrick Jermann

Vous avez reçu un email cette semaine:

"Mieux comprendre la première année".

- Lisez la **feuille d'information**
- **Cliquez sur le lien** pour vous inscrire

Conditions:

- Vous êtes totalement libre de participer
- Vos données sont confidentielles
- Vos données sont anonymisées
- Vos enseignant-es n'ont pas accès à vos réponses ni au fait que vous participez
- Vous pouvez vous retirer à tout moment

Posez vos questions à Patrick.Jermann@epfl.ch

Et les déroulements vont être sur une année académique complète. Donc vous voyez ici qu'il y a certains types d'étapes. Les personnes qui acceptent et justement participent à cette étude doivent répondre des questionnaires tous les longs de l'année académique. Marquer ces longs, donc aujourd'hui on est la semaine 1. Et la semaine prochaine déjà, on débute avec quelques questions démographiques. Après il y a des questions des raisonnements mathématiques, ça prend une heure. Donc vous voyez, la première c'est trois minutes. Les questions math c'est plutôt une heure, il faut répondre ça en l'effet sur internet. Mais c'est compté la quantité d'heure. Et c'est payant, donc on paye 3 francs et la participation et ça c'est décalé en deux morceaux. Donc c'est étalé dans une première fois. Dans France vous voyez après plus ou moins les questions sur math et après la fin de l'année académique différentes de plus. Et BAAE c'est bien-être, appartenance, aide et efficacité.

notes

résumé

41m 7s

EPFL

Joignons nos forces

5



Prof. Kathryn Hess
Vice-présidente associée pour les affaires estudiantines et l'outreach



Prof. Pierre Dillenbourg
Vice-président associé pour l'éducation



Vous !
Etudiant-es de 1ère année

Une initiative de la direction académique pour:

- mieux **comprendre** le système
- **améliorer** la formation

Questions et gestion:
Patrick.Jermann@epfl.ch

Votre participation

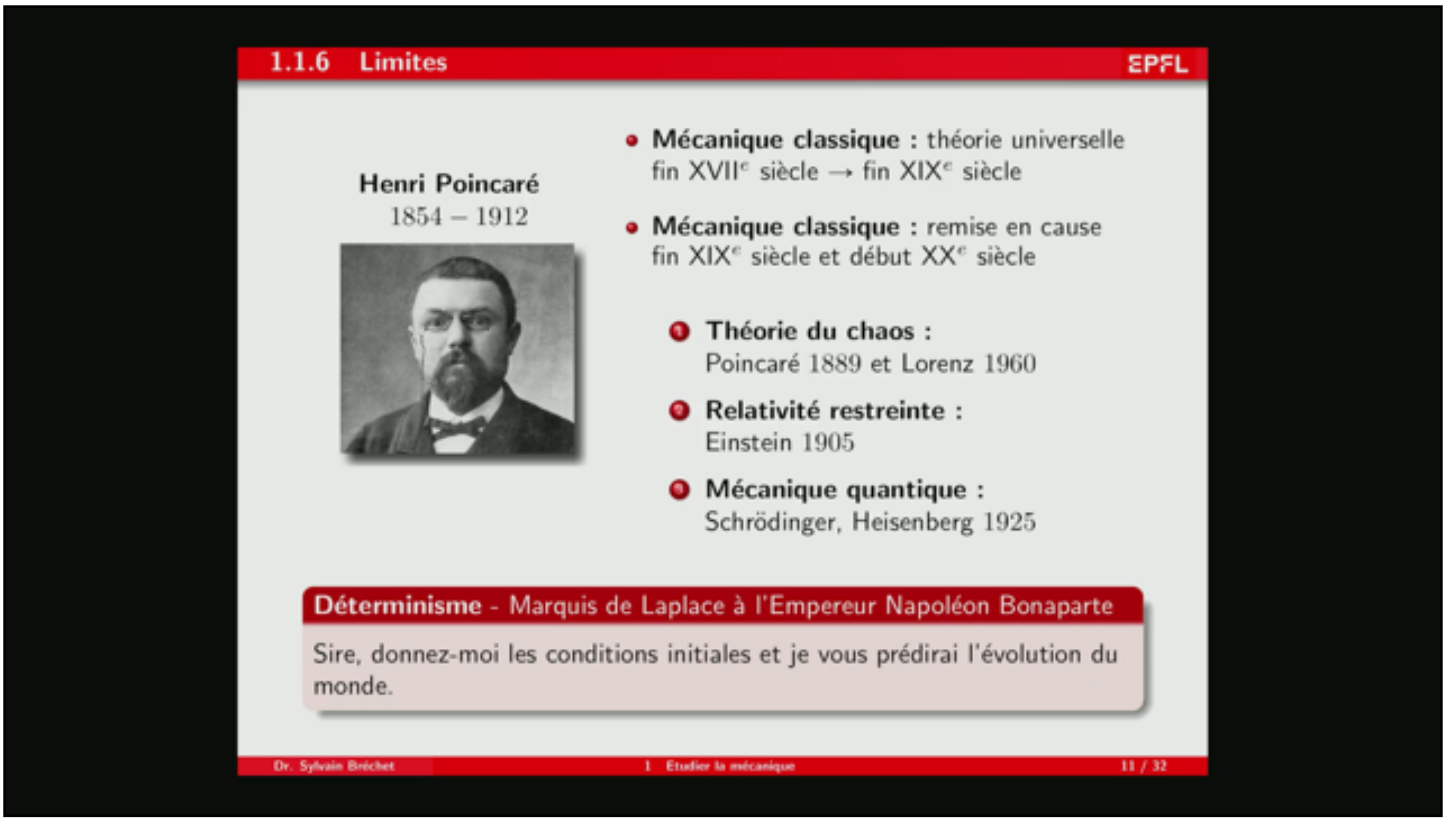
- Vous participez à améliorer l'école
- **90 minutes** de votre temps
- **30 CHF** payés en deux fois (octobre 2024 et juin 2025)

Vous pouvez bien sûr arrêter, comment participer peut-être, je veux dire, les choses que j'ai dit après. Donc vous avez dû recevoir un courrier justement cette semaine qui s'appelle mieux comprendre la première année. Vous pouvez lien, il y a un lien qui est marqué « Feu et d'information » si vous cliquez là-dessus ça vous ramène sur un pâchoir beaucoup plus d'information. Sur les déraoulements et les fonctionnements par exemple. Mais quelque chose que je peux mentionner c'est que bien sûr la participation est complètement libre. Toutes les données sont anonymisées, elles sont confidentielles, les enseignants n'ont pas accès ou enseignantes n'ont pas accès aux réponses même si vous faites des participés ou pas participés et vous pouvez vous retirer aussi à tout moment.

notes

résumé

42m 17s

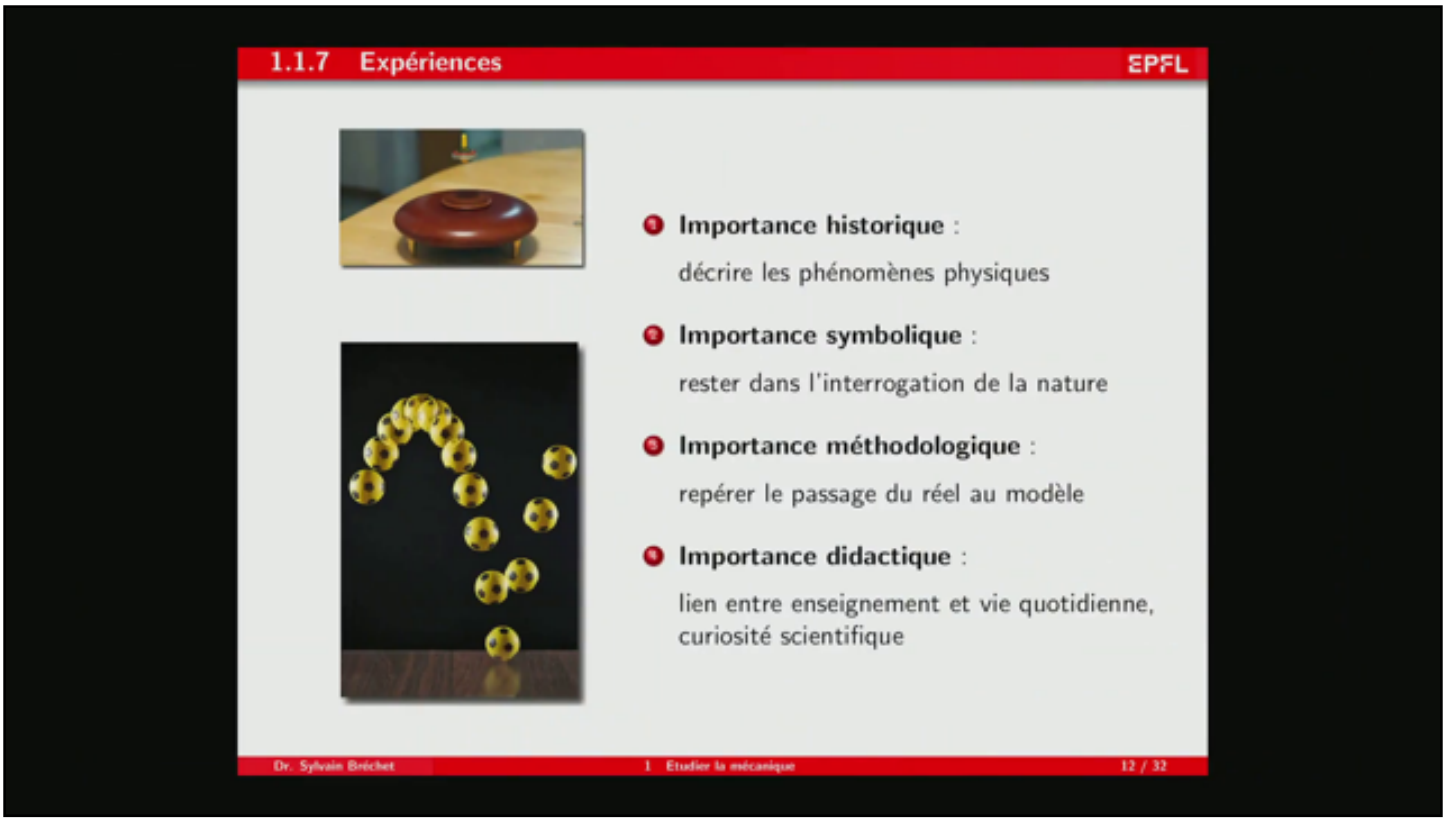


Donc ça c'est pour montrer les personnes qui sont justement responsables de ça. Donc les vices présidents associés pour l'éducation et la vice-présidente associées pour les affaires et les étudiantines. Donc de nouveau l'idée c'est mieux comprendre les différents ressources en facteurs canteriennes dans la réussite et l'échec et pouvoir peut-être justement essayer de voir des engendres et des plans stratégiques pour pouvoir ressoudre ces types de problèmes. Donc la participation est encouragée mais bien sûr pas obligatoire. Donc en tout ça va être une heure et demi sur toute l'année académique et c'est payer et être en franc je crois que ça c'est tout. Oui quelque chose que je voulais dire avant ça c'est vous pouvez vous retirer de l'étude quand vous voulez. Donc il n'y a pas besoin de rester et personne va savoir ça donc ça c'est complètement anonyme. Donc je vous remercie beaucoup et je vous encourage à participer parce que ça serait vraiment très subtil pour les générations venir. Merci beaucoup. Voilà donc n'hésitez pas à participer c'est une occasion unique et en plus vous êtes très milléniaire.

notes

résumé

43m 1s

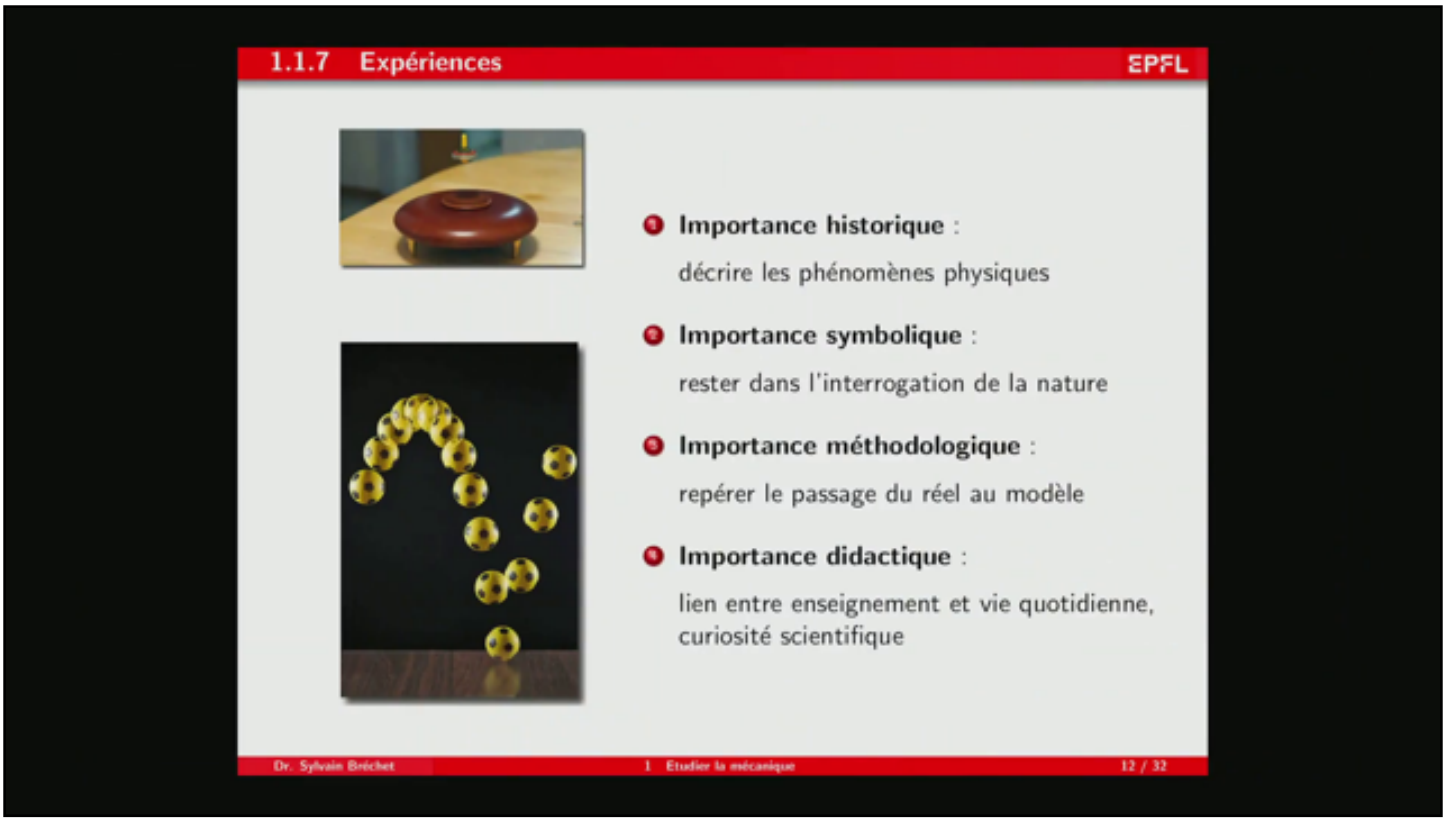


Voilà. Vous m'entendez vous m'entendez. Apparemment le volume est un peu moins fort. Bon alors ce que je vais faire je le mets ici. Ah c'est aussi au niveau de la cravate. Voilà je vais essayer de parler fort c'est enregistré. Est ce que ma voix passe dans le. Ok bon peut-être que je tiens le micro à la main puis je vais répondre dans leur suivante. Alors les trois révolutions qui ont si vous voulez conduit à une généralisation des concepts classiques sont tout d'abord la théorie du chaos. Qu'on doit aux grands mathématiciens Henri Poincaré. Qu'est ce qu'il a compris Poincaré. Poincaré il a compris que ce qu'on imagine naïvement est faux. Si vous prenez une équation différentielle que vous définissez les conditions initiales. Si vous intégrer ces équations pour trouver la solution. Vous ne la trouverez pas toujours. Vous pourrez la trouver lorsque les équations sont linéaires. Si elles sont non linéaires ça sera pas possible. Vous ne pourrez pas prédire l'évolution à grand temps d'un système. Alors je vais vous montrer un exemple en fait même deux exemples tout simples dans quelques instants. Ou BXLK. Ensuite cette théorie du chaos a été laissée de côté jusqu'aux années 60. Avec les travaux de Ruel, Tackens et Lorenz Santé. Où ce chaos a été étudié dans ce qu'on appelle un espace de face. De l'un espace de la vitesse et de la position. Où les trajectoires sont en fait représentés par des structures fractales qu'on appelle des attracteurs étranges. C'est très joli. C'est assez étrange mais c'est très joli. L'autre révolution, ça a été la relativité restreinte qui a été initiée là aussi par Poincaré. Poincaré et Lorenz ont participé à l'élaboration d'un article publié en 1903 qui contient toutes les équations mathématiques de la relativité restreinte. Alors pourquoi est-ce qu'on l'associe à Einstein ? Parce qu'Hannstein il a compris fondamentalement, conceptuellement, ce que signifiait cette équation. Einstein

notes

résumé

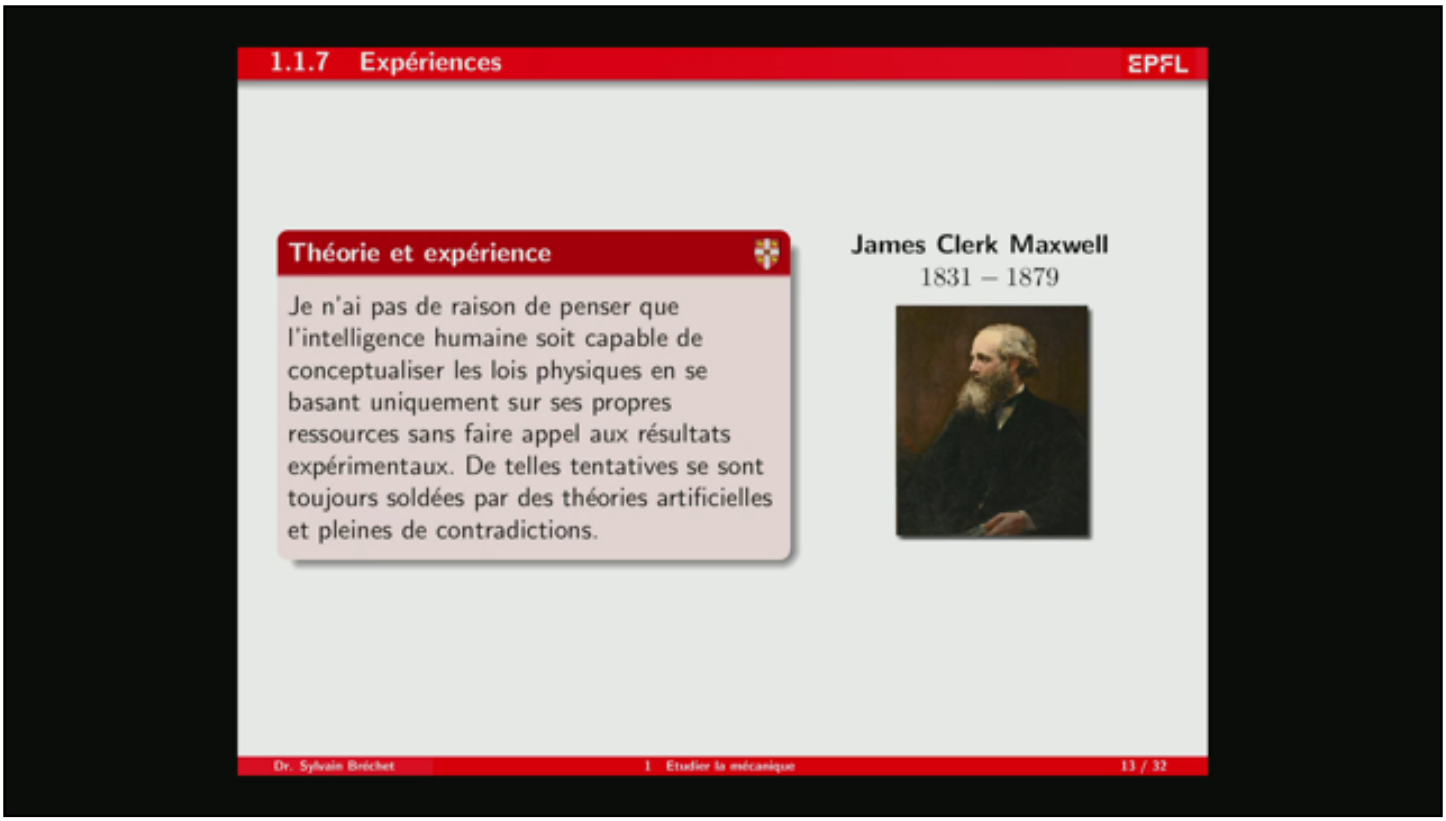
44m 21s



il a écrit quelque chose qui est quasiment triviale du point de vue mathématique mais qui a tout changé du point de vue de la physique. C'est égal, constante. La vitesse de la lumière est une constante, quel que soit l'observateur et saint, ça a remis en cause le caractère absolu de l'espace et du temps. On aura l'occasion d'en reparler. La troisième révolution qui a lieu une vingtaine d'années plus tard, on fêtera le centième anniversaire de cette révolution l'année prochaine, c'est la mécanique quantique. On en parlera plus en détail. Lorsqu'on veut décrire ce qui se passe à l'échelle microscopique, on ne peut plus décrire les grandeurs physiques à l'aide de fonctions. Elles sont décrites par des opérateurs linéaires qui sont une généralisation de la notion d'application linéaire. Elles agissent sur un espace vectoriel, les éléments d'un espace vectoriel qui est cet espace de Hilbert, de dimension infinie formé de fonctions. Alors, ce mécanique quantique, si vous voulez, a été le fruit d'une synthèse des travaux principalement du physicien autrichien Erwin Schrödinger et du physicien allemand Werner Eisenberg, qui ont eu des approches absolument géniales, dont on reparlera à la quatorzième semaine de secours. Mais, disons, au sein même de la mécanique newtonienne, il y a cette idée, qui n'est pas correcte, que le déterminisme est absolu et qu'on peut tout décrire si on connaît les conditions initiales. C'est ce qui avait été formulé par le marquis Pierre Simon de la Place, à l'empereur Napoléon Bonaparte, s'y dire, donnez-moi les conditions initiales et je vous prédirai l'évolution du monde.

notes

résumé

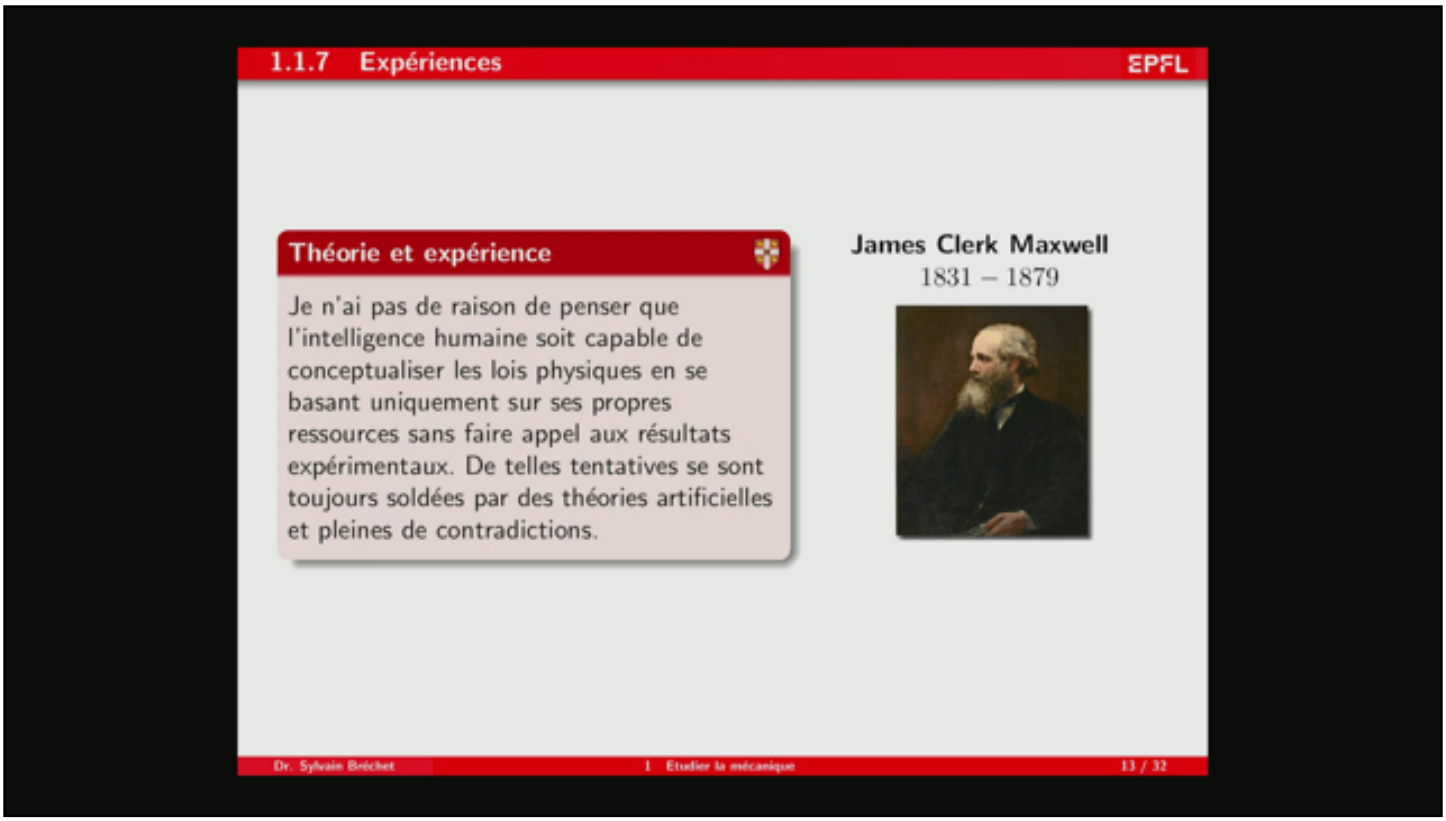


On va maintenant passer aux expériences. Ces expériences, elles ont une importance historique. Historiquement, c'est grâce aux observations, grâce aux expériences que les perfondateurs de la science moderne ont pu décrire les phénomènes physiques, qu'ils ont pu confronter les modèles à la réalité pour voir si les modèles étaient corrects ou non. Il y a une importance symbolique à faire des expériences. Il faut interroger la nature, rester dans ce dialogue avec l'univers qui nous entoure. Et puis surtout, il faut repérer les différences qu'il y a entre le réel et le modèle. Si je prends une pomme, je la laisse tomber, on pourrait se dire qu'on peut décrire ça facilement, il y a l'accélération du champ gravitationnel terrestre, on a un mouvement rectil uniforme. C'est vraiment aussi simple que ça ? Non. Puisqu'en fait, la pomme, elle va rentrer en collision avec les molécules d'air qui se trouvent autour. Et si on veut tout décrire avec une grande précision, même les plus grands supercalculateurs disponibles aujourd'hui ne permettraient pas de le faire. Et pourtant, on peut simplifier cette réalité complexe en assimilant la pomme, un point qui est sujet au champ gravitationnel terrestre. Vous voyez que le modèle est simple, d'accord ? Il peut être simple, mais il doit pas être simpliste. Einstein disait, everything should be made as simple as possible, but not any simpler. Il faut rendre tout aussi simple que possible, mais il y a un niveau de simplicité minimale qu'on ne peut pas franchir, puisqu'ensuite, on dit des absurdités. C'est important de repérer ça. Et puis il y a aussi une importance d'idée agactique dans les expériences. C'est de faire un lien entre la curiosité scientifique, la vie de tous les jours, et la description mathématique qu'on est en train de faire dans le cadre d'un modèle théorique. Par exemple, imaginez que vous êtes en train de visiter une ville, et puis vous prenez un

notes

résumé

48m 42s



taxi, et puis le chauffeur taxi, il y a une petite gourmette qui est attachée au rétroviseur du véhicule. Alors, qu'est-ce qu'il accélère ? La gourmette, elle vient vers vous. Qu'est-ce qu'il freine quand la gourmette part vers le pare-brise ? La question, c'est pourquoi ? On va pouvoir répondre à cette question. On répondra à cette question lorsqu'on étudiera le mouvement relatif à la 10e chapitre de ce cours, 10e et 11e chapitre de ce cours. Avant de vous présenter les expériences, j'aimerais encore vous lire une citation du plus grand physicien du XIXe siècle, James Clark Maxwell, qui a unifié l'électricité et le magnétisme. Pourquoi je vous parle de Maxwell ? Parce que c'était un très bon mathématicien, et lorsqu'on l'a demandé à Einstein, s'il se tenait sur les épaules de Newton, il a répondu non sur celle de Maxwell. Maxwell nous met en garde sur l'excès de théories face à l'expérience. Il dit que je n'ai pas de raison de penser que l'intelligence humaine soit capable de conceptualiser les lois physiques en se basant uniquement sur ses propres ressources, sans faire appel aux résultats expérimentaux. Il ajoute que telles tentatives se sont toujours soldées par des théories artificielles et pleines de contradictions.

notes

résumé



Donc on ne peut pas faire de la physique dans sa tour d'ivoire. On est obligé de confronter le modèle. La réalité, c'est ce qu'on va faire maintenant.

notes

résumé

51m 49s



On va commencer par une petite expérience pour se mettre en genve, qui doit être sur la caméra 27. C'est le cas. C'est une toupie magnétique qui va l'éviter. Pourquoi est-ce qu'elle l'évite ? Là, vous voyez que la toupie, elle a tendance, elle est attirée par la base. Pourquoi ? Parce qu'au niveau de la base, il y en aiment. Et puis c'est tellement, il a une certaine polarité, la toupie est constituée d'une partie métallique, qui est aussi un aimant. Elle est polarité, qui se font face, sont en fait des polarités égales, ce qui génère une force répulsive. Cette force, elle décroît en fonction de la distance. Mais bon, si je lâche cette toupie, que va-t-il se passer ? Elle tombe pourquoi ? Parce qu'elle est soumise à une autre force, qui est son propre poids, liée au champs gravitationnels terrestres. Si on arrive à la placer au bon endroit, elle pourrait l'éviter. Mais si on le fait à la main, elle va automatiquement basculer. Pourquoi ? Parce que la force magnétique, due à l'instabilité, va avoir tendance à la faire pivoter. Donc il faut l'empêcher de pivoter, grâce à un effet gyroscopique dont on parlera dans le cadre du solide indéformable au chapitre 13 de secours. D'accord ? Il faut lui donner cet effet gyroscopique, en la faisant tourner suffisamment rapidement sur elle-même. Alors on va essayer. C'est difficile à réussir. Je vais m'y reprendre à plusieurs fois. Que fait une toupie lorsqu'elle voit un prof de physique ? Évidemment, elle l'évite. D'accord ? Voilà. C'était pas mal. On va la laisser tourner, jusqu'à ce que naturellement, elle reprenne sa position. Il n'y a pas de trucage, c'est juste du magnétisme. C'est de la bonne vieille physique. Passons aux autres choses maintenant. Quelque chose qu'on discutera ensemble, au chapitre 7 de secours, c'est la destruction par résonance acoustique d'un verre. Qu'est-ce qu'on va faire ? On

notes

résumé

51m 56s



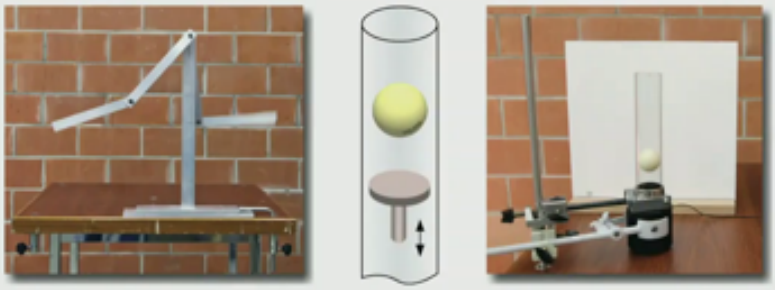
va exciter un verre tulip, un verre à cognac. D'accord ? On va l'exciter avec un haut-parleur. Et puis, si on lui donne la bonne fréquence, donc à l'aide d'ultrasons, on va l'exciter, si vous voulez, à la fréquence naturelle de vibrations de ce verre. Ce qui va le déformer, vous allez le voir par-dessus, il a normalement une forme circulaire. La déformation va le rendre elliptique, dans deux sens opposés, un peu comme un coin-coin. D'accord ? Et puis, si cette excitation est suffisamment importante, la structure interne qui maintient la cohésion entre les constituants alimentaires, les atomes qui se trouvent dans le verre, d'accord ? Va se rompre, et le verre va se briser. C'est un effet qu'on appellera l'effet Castafior, Bianca Castafior. Je vous dirais pourquoi, au chapitre 7 de ce cours. Donc, cette expérience se trouve sur la caméra 8. Allons faire un petit tour, sur cette expérience. Vous ne voyez rien, puisque il faut que la lumière s'allume. Voilà, normalement, ça devrait apparaître. C'est le cas. Donc, avant même attendez, avant même de le faire, pour voir un peu ce que ça va donner, on peut tester, mécaniquement, la fréquence de résonance, on tape sur le verre. C'est cette fréquence que vous cherchez. D'accord ? Alors, essayons de voir. Évidemment, ça a été préréglé. Donc, on est un peu près dessus. Ce qu'on va faire, c'est augmenter l'amplitude. Alors, si ça vous fait mal aux oreilles, vous pouvez les boucher. D'accord ? ... L'effet bien qu'a fait le saffior. Caramba, le recignel Milanais, a encore frappé. ... Alors, ça, c'est pour vous dire que c'est important, les oscillateurs harmoniques et la résonance. Il faudra bien tout comprendre, pour comprendre comment on arrive à la destruction de ce verre à distance. Le chaos apparaît quelque part quelque chose d'abstrait. Peut-être pour certains, c'est concret. Ça peut être l'état d'une chambre d'étudiant, par exemple, après une soirée

notes

résumé

1.1.7 Expérience - Chaos en mécanique

EPFL



1. **Pendules articulés :** si deux pendules articulés sont lancés avec des amplitudes initiales comparables et suffisamment importantes, leurs mouvements se désynchronisent rapidement (sensibilité aux conditions initiales).
2. **Balle de ping-pong :** une balle de ping-pong rebondit sur une plateforme astreinte à un mouvement périodique bien déterminé. Lorsque le tube est ouvert, la fréquence des rebonds est aléatoire (chaotique). Avec le frottement imposé par le bouchon, le mouvement devient périodique.

notes

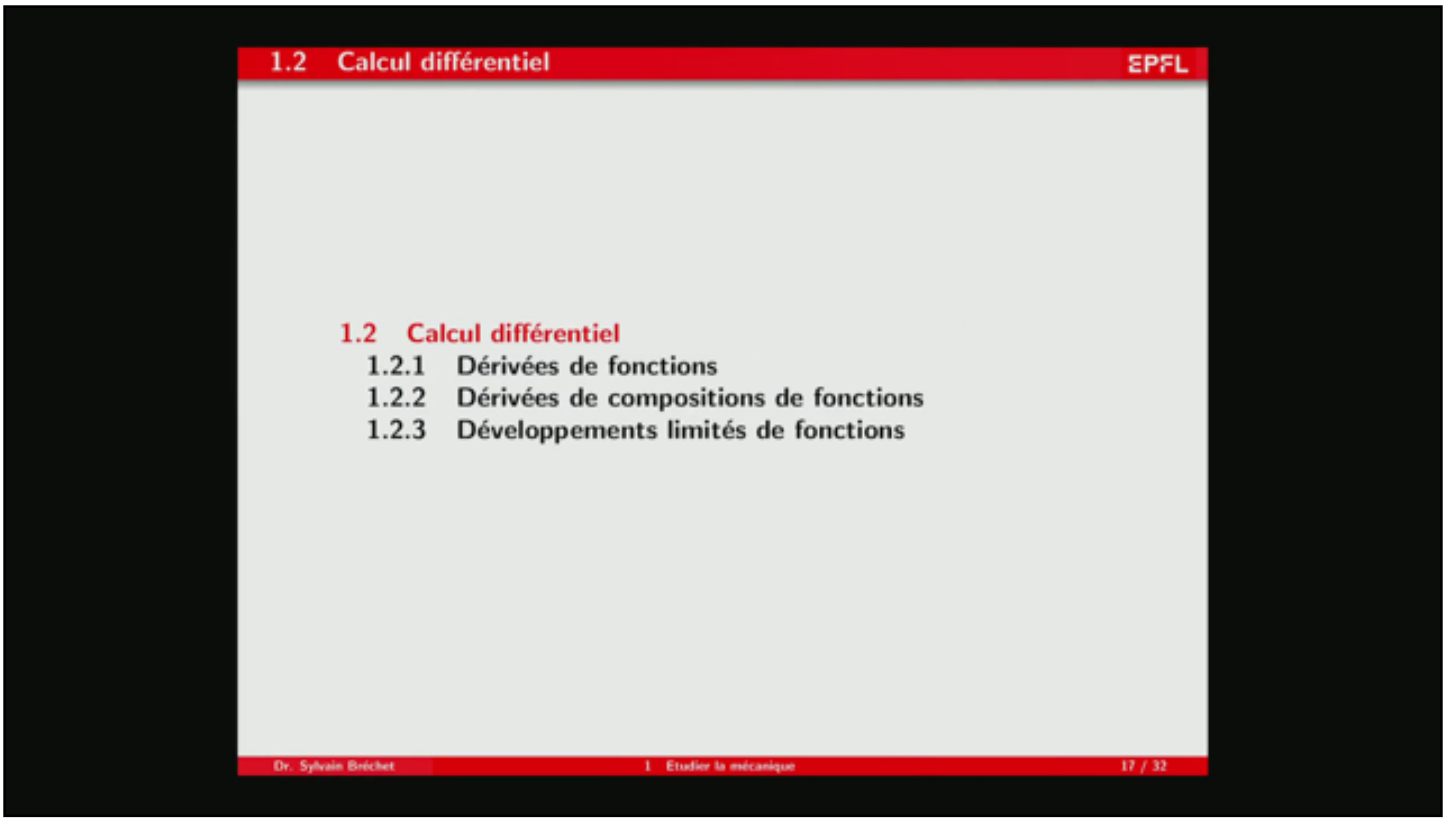
résumé



ensemble. C'est sur la caméra A7. C'est l'exemple suivant. On a ici une balle de ping-pong et on a un vibreur. Alors vous allez me dire oui mais on n'a pas de vibreur. Si, si, vous en avez un, c'était vos téléphones portables. D'accord ? Alors vous mettez la balle de ping-pong sur le téléphone portable. Il faut quelque chose qui la guide. C'est le petit glace que vous avez ici. Puis maintenant, vous allez bien écouter la fréquence des rebonds. Vous allez voir que cette fréquence de rebonds, qu'on entend au bruit, grâce au choc acoustique. D'accord ? Cette fréquence va être complètement aléatoire. Contrépidement aléatoire. Si on couvertissait ceci en signal digital, le signal analogique en signal digital, on aurait un vrai générateur de nombre aléatoire. D'accord ? C'est complètement aléatoire. C'est chaotique. Alors, est-ce qu'on peut le rendre intégrable ? La réponse est oui. Comment ? Grâce à un bouchon. C'est régulier. Pourquoi ? Parce que le bouchon va introduire une force de frottement visqueux due à la compression de l'air. Cette force de frottement visqueux va rendre la dynamique linéaire, alors qu'elle était avant non linéaire. Et c'est ça qui fait que le chaos disparaît. D'accord ? Voilà. Donc ça, c'est deux exemples tout simples pour montrer que le chaos, il est intrinsèque partout. Il est autour de nous. D'accord ? L'un des meilleurs exemples, c'est le fonctionnement même de la bourse, qui est beaucoup plus compliqué que le chaos en réalité, parce que le chaos est simple. Dans la mesure où c'est

notes

résumé

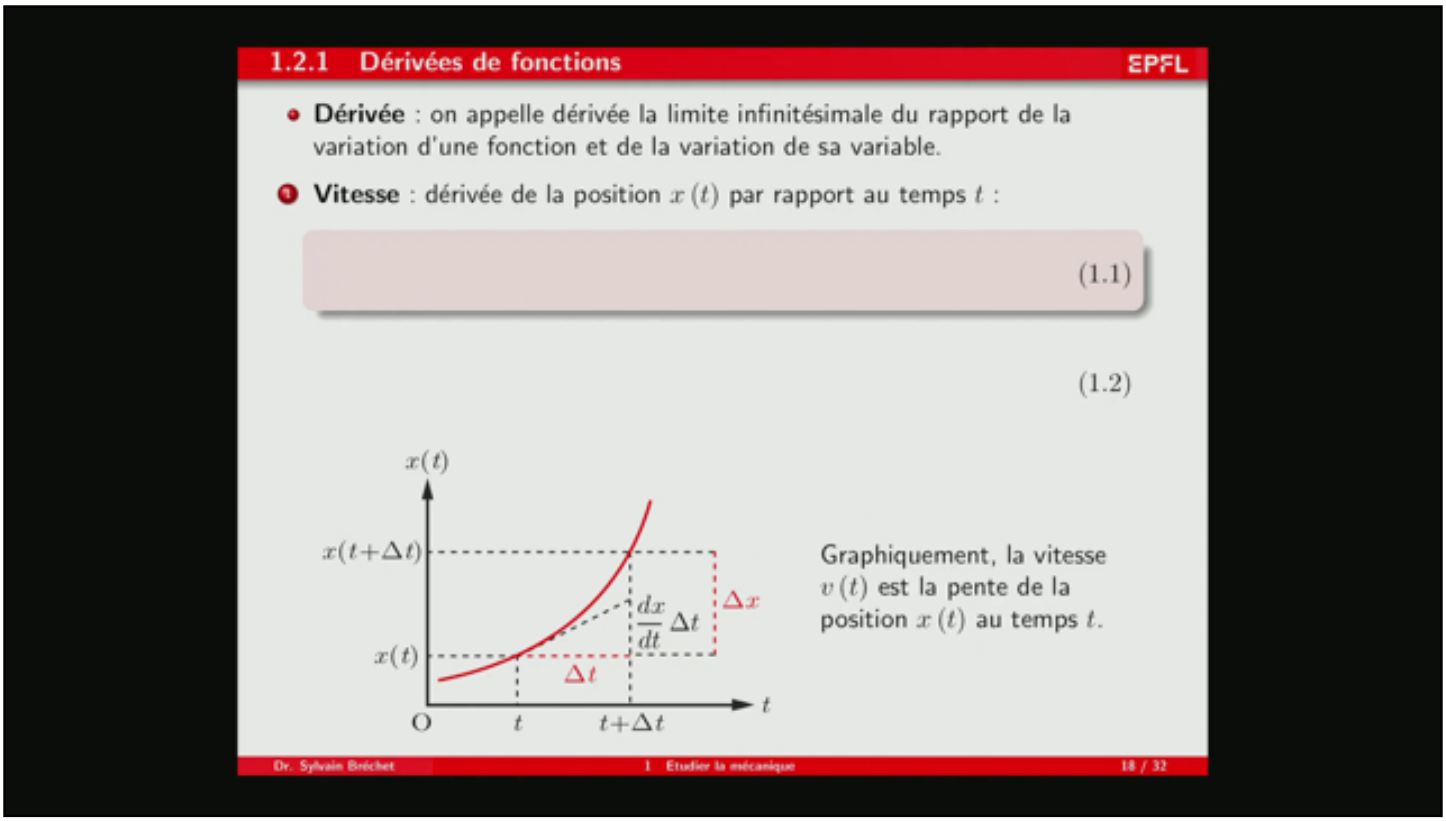


un certain nombre de choses sur d'un système chaotique, les systèmes les plus complexes sont les systèmes mixtes dans lesquels le chaos apparaît avec une structure fractale par rapport au reste qui intégrame. D'accord ? Et ces systèmes mixtes, le meilleur exemple, c'est justement la bourse. C'est pour ça que c'est compliqué de gagner de l'argent en faisant des modèles de l'air. Beaucoup de gens ont essayé. D'accord ? On peut avoir un certain succès en faisant ceci. C'est notamment le cas si vous appliquez des techniques développées par un médaillier Fils, qui est maintenant prof à l'EPFL, qui est Martin Herrer, en département de mathématiques. D'accord ? Mais vous allez faire un certain nombre de choses et ça, là aussi, c'est limite. Voilà. Jusqu'à présent, on a vu une introduction

notes

résumé

59m 38s

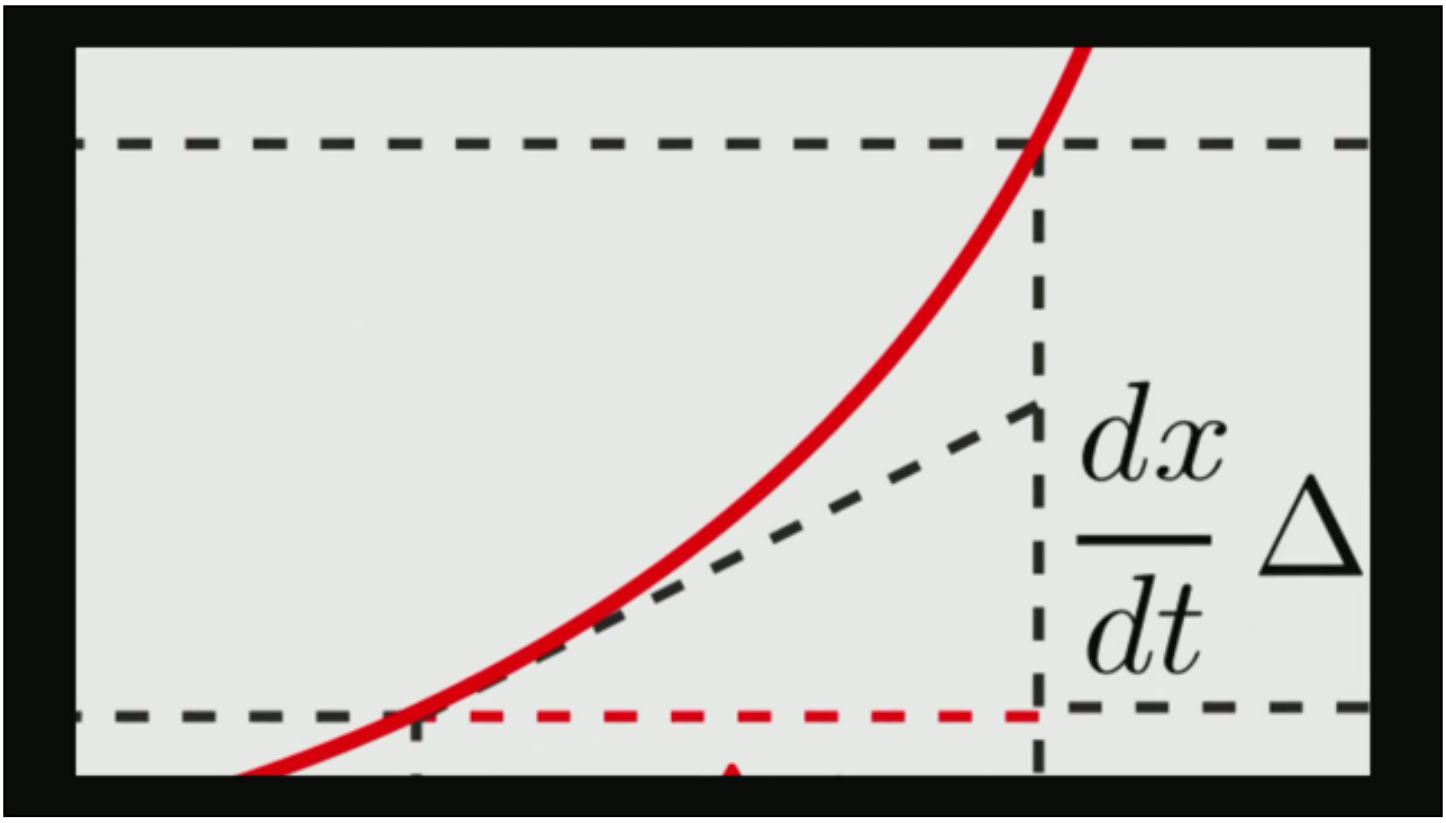


au sujet de la mécanique. On va maintenant s'intéresser aux outils mathématiques. D'accord ? Comme je vous le disais, en introduction, dans le contexte de la mécanique, ce qu'on cherche à faire, c'est de déterminer l'évolution de grandeur physique qu'on va décrire par des fonctions qui varient au cours du temps. Et c'est justement cette variation locale qui nous intéresse, la variation qui est décrite à l'aide d'une pente, la pente, la tangente, au point considéré, au temps considéré. D'accord ? Donc cette pente de la tangente, c'est par définition la définition de la déficitité. Et c'est pour ça que la déficitité, c'est par définition la dérivée. On va définir ce qu'est une dérivée, première, deuxième, d'accord ? On va voir ensuite des dérivées de composition de fonctions et on terminera par des développements limités au premier.

notes

résumé

60m 18s

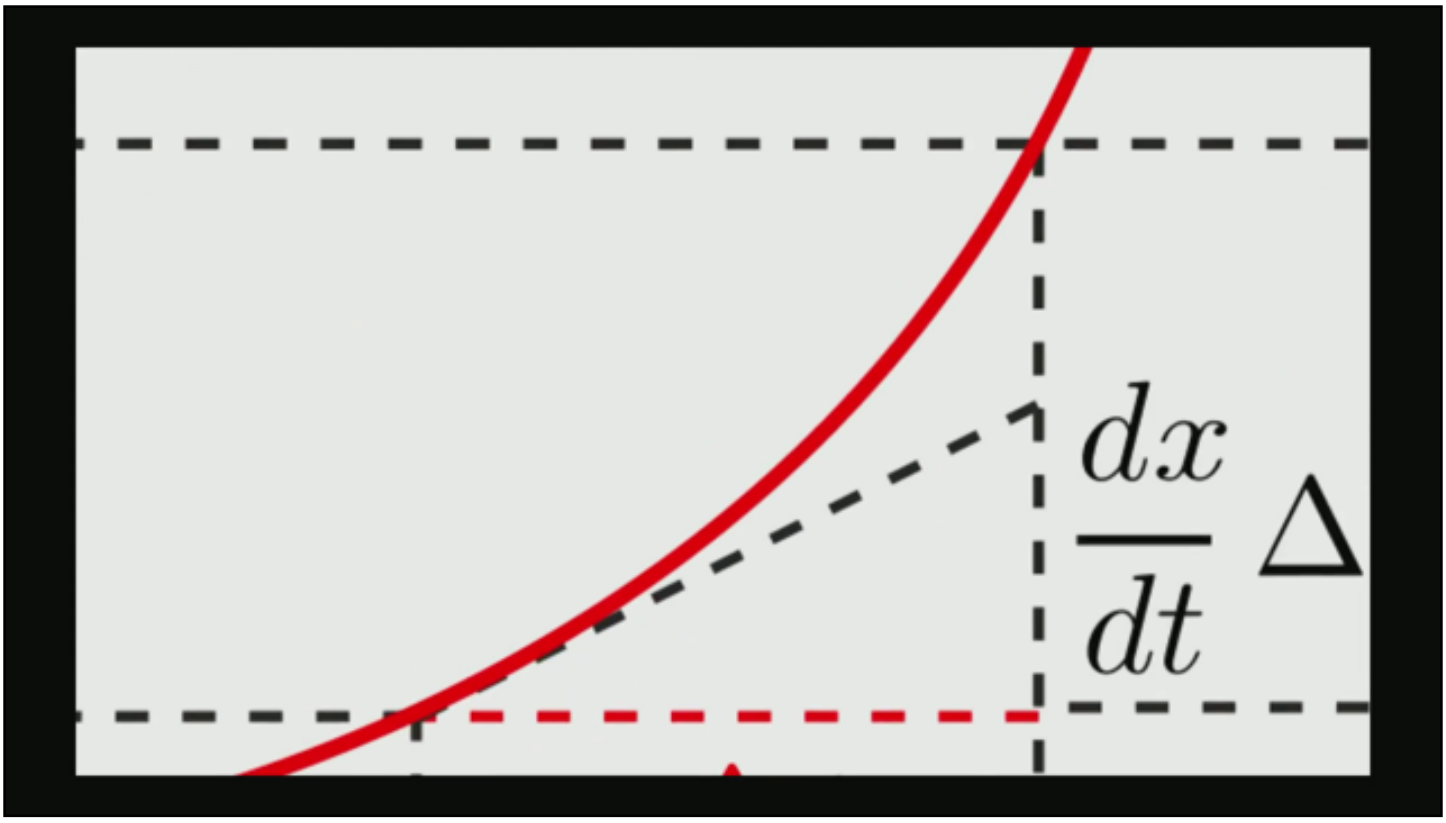


Donc, commençons de manière pédestrale. On appelle dérivée la limite infinitesimal du rapport, de la variation d'une fonction par rapport à la variation de sa variable. Alors évidemment, pour que ça marche, il faut prendre une fonction qui est continue et qui est dérivable. On va faire une dérivée seconde, donc une fonction qui est au minimum une fonction de classe C2. D'accord ? Imaginons, pour simplifier les choses, une fonction scalaire qui décrirait la position le long d'un axe. Donc il faut supposer que la position est continue, qu'on a un objet décrit par un point. D'accord ? Est-ce que l'espace est continu, est-ce que le temps est continu ? Rien n'est moins sûr. Et pourtant, on commence en faisant cette hypothèse. Je vous rend attentif à cela, puisque les ténons et aboutissants de ceci font partie de recherches actuelles sur la gravitation quantique. D'accord ? On ne sait pas quelle est vraiment la structure de l'espace et du temps pour simplifier. On suppose qu'elle est continue. Bon, très bien. Alors on va prendre la dérivée de la coordonnée de position le long d'un axe, l'axe horizontal, l'axe des absces, l'axe X. Et on va donc définir la vitesse V, la vitesse scalaire qui est une fonction du temps qu'on va définir comment, comme le rapport, je laisse un petit espace volontairement, comme le rapport de la variation de la coordonnée de position sur l'intervalle de temps. Et évidemment, on veut savoir ce qui se passe localement lorsque l'intervalle de temps tend vers 0. D'accord ? Concrètement, il faudra donc prendre la limite de delta T qui tend vers 0. Et la variation de la position, ça sera quoi ? Et bien, c'est la position évaluée au temps final, au temps T plus delta T, moins la coordonnée de position X évalue au temps T. On divise par delta T. D'accord ? Bon. Alors, ces limites, on en a

notes

résumé

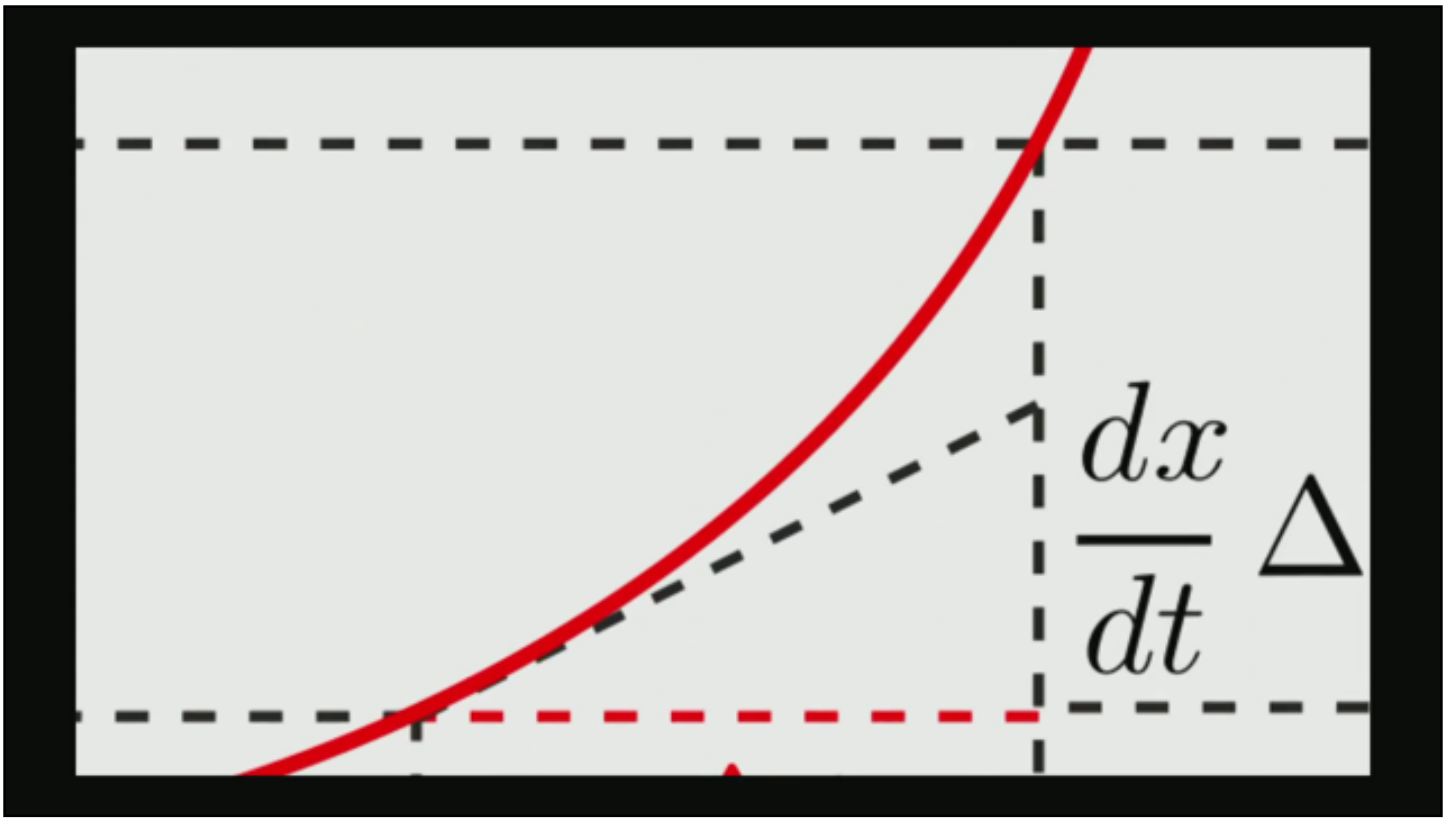
61m 6s



partout, tout le temps, quand on fait de la physique. Alors, cette écriture-là, elle est un peu lourde. Elle est complètement correcte sur le plan mathématique, mais elle est très lourde. D'accord ? Est-ce qu'on peut la simplifier ? Oui, on peut le faire. Lorsqu'on met en delta, on considère une variation, quelconque d'une grandeur. D'accord ? Nous, ce qui nous intéresse, ce n'est pas une variation, quelconque. Nous, ce qui nous arrête, intéresse, c'est une variation instantanée. D'accord ? Donc, on va remplacer les deltas par des petits dés, qui signifient une variation aussi petite qu'on veut, une variation d'ordre différentiel. D'accord ? Je vais détailler ce que ça signifie dans quelques instants, mais si on fait ça, on peut alors écrire que la vitesse, c'est quoi ? Eh bien, c'est simplement le rapport du déplacement infinitesimal d'x sur l'intervalle de temps infinitesimal. Les deltas ont été remplacés par des petits dés, et la limite devient implicite. On l'écrit plus explicitement. D'accord ? Donc, ça, c'est pour le terme quitte ici. On va faire pareil pour celui-ci. On aura donc x évalué au temps final, soit en T plus d'été, l'intervalle de temps infinitesimal, moins x évalué au temps T divisé par l'été. Alors, cette notation-là est là un grand avantage. C'est qu'on peut maintenant manipuler les grandeurs dans une équation algébricment. On peut, par exemple, tirer de cette relation la variation infinitesimal de la corné de position d'x en termes de l'intervalle de temps infinitesimal d'été. Comment est-ce qu'on va faire ceci ? On partit de l'équation qui est ici. Et on va multiplier le membre de gauche et le membre de droite par l'intervalle de temps infinitesimal d'été. Et on a alors que le déplacement infinitesimal d'x c'est la vitesse fois l'intervalle de temps infinitesimal. Concrètement, graphiquement, d'accord ? Qu'est-ce qu'on a fait ? Prenons un exemple. Imaginons que la coordonnée de position soit décrite par le

notes

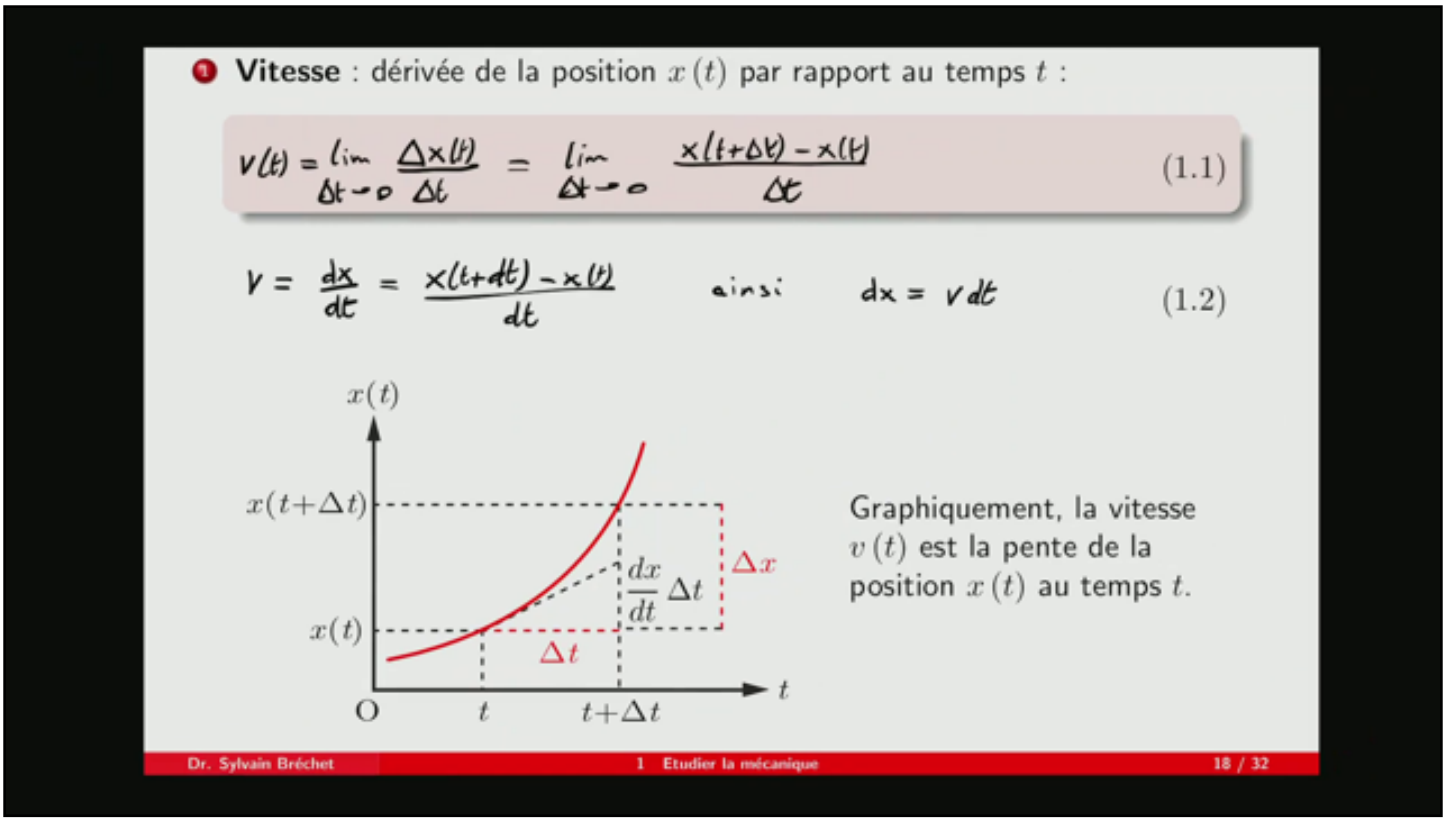
résumé



graph que vous voyez ici en rouge. D'accord ? Bon. Alors on prend de temps. Un temps qui est le temps t, ici, un temps qui est le temps t plus delta t et vous avez évidemment les valeurs correspondantes du graph de la coordonnée de position le long de cet axe des abscesx de t. Donc vous avez x de t qui est ici, x de t plus delta t qui est là. D'accord ? Si on calcule la pente et qu'on se passe. D'accord ? Si, naivement, on divise la dénivellation qui est la variation de x sur la distance horizontal qui est la variation t, qu'est-ce qu'on trouve ? La pente de seul segment. C'est pas ça qui nous intéresse. Nous, on veut la pente de la tangente. Donc qu'est-ce qu'on doit faire ? On doit prendre le point qui est là et on doit le déplacer le long du graph pour l'amener infiniment proche du point qui est ici. Qu'est-ce qu'on fait ? On zoom. Alors si vous zoomez,

notes

résumé



vous zoomez encore, localement, quelle que soit la coupe que vous allez avoir, le rayon de courbure va tendre vers l'infini et vous allez avoir quelque chose qui s'apparente localement à une droite. D'accord ? Et alors vous pourrez définir la dérivée, la pente de la tangente au graph. Cette pente-ci et non pas celle-là. D'où la limite. Alors maintenant, avec notre écriture,

notes

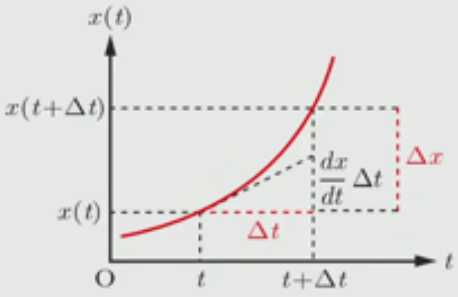
résumé

65m 35s

- **Dérivée** : on appelle dérivée la limite infinitésimale du rapport de la variation d'une fonction et de la variation de sa variable.
- **Vitesse** : dérivée de la position $x(t)$ par rapport au temps t :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \qquad (1.1)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} \quad \text{ainsi} \quad dx = v\,dt \qquad (1.2)$$



Graphiquement, la vitesse $v(t)$ est la pente de la position $x(t)$ au temps t.

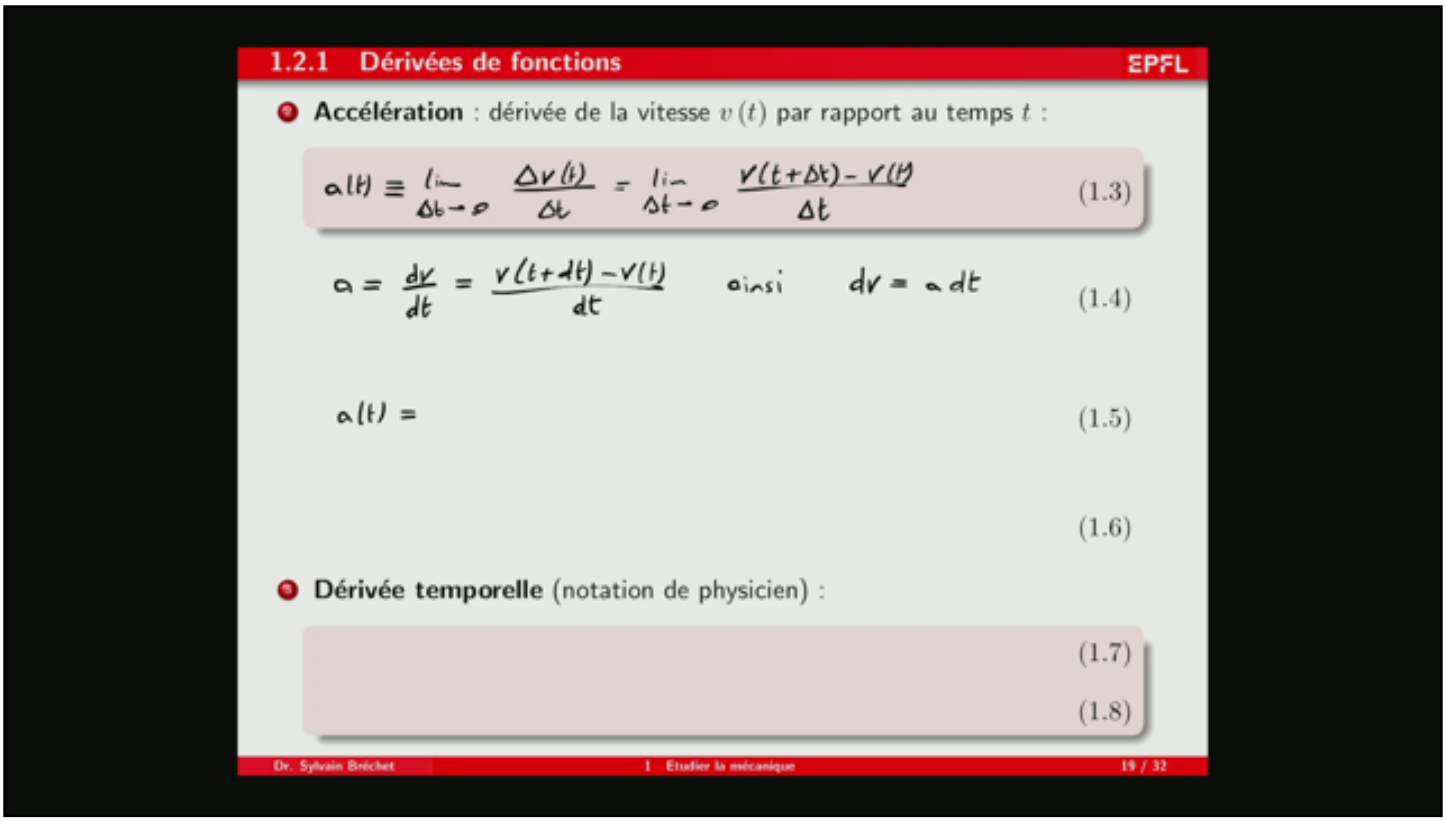
Dr. Sylvain Bréchet | 1 Etudier la mécanique | 18 / 32

on a simplement remplacé les deltas par des dés, ce qui veut dire qu'on a approché infiniment proche les deux points pour que ce résultat soit un résultat exact.
D'accord ? Ça c'est juste pour l'écriture.

notes

résumé

65m 59s

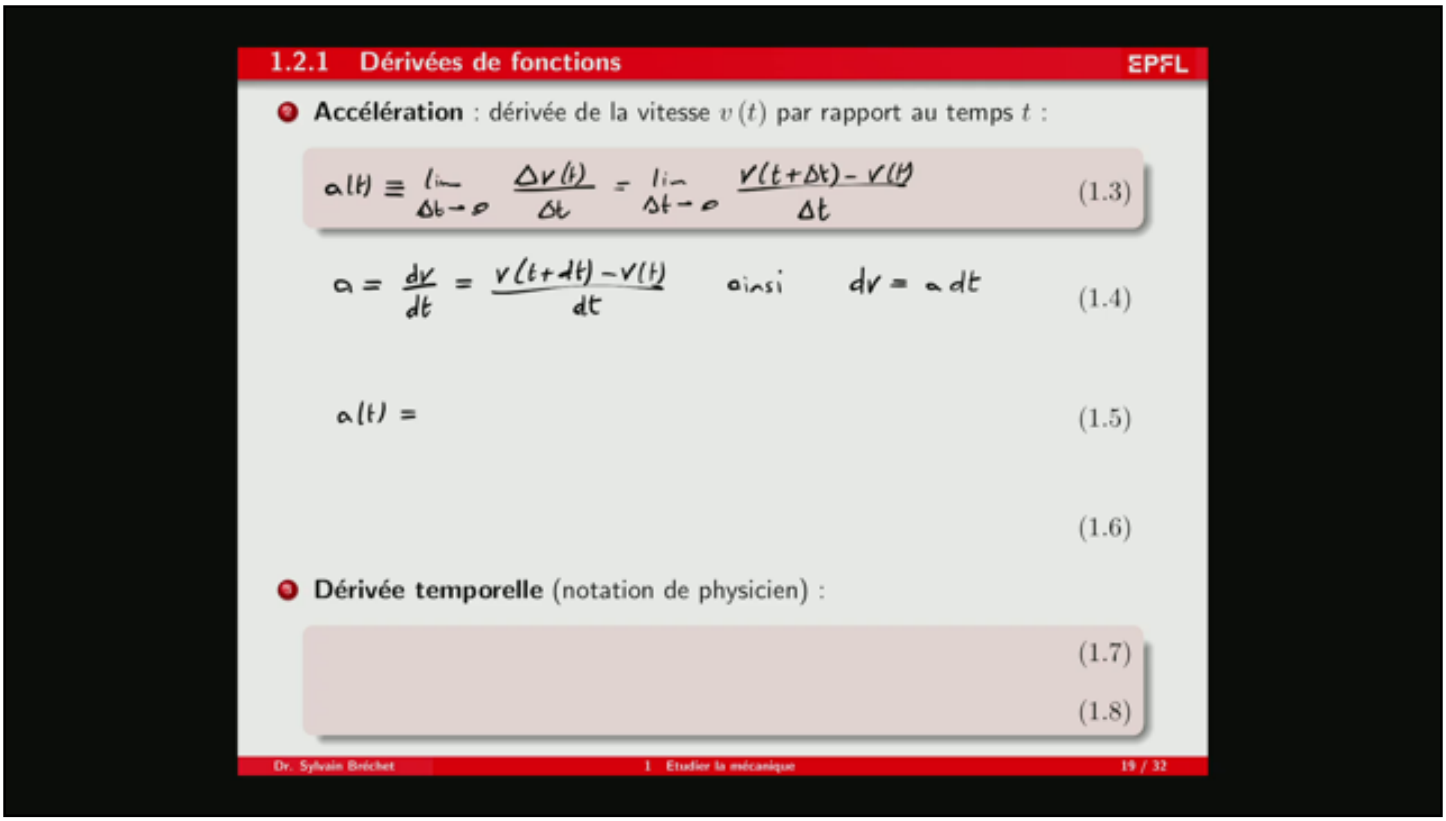


Il faudra se familiariser avec cette écriture qui est importante dans la pratique. Voilà. Alors, je vais juste faire un frise sur le bimaire latéral. Voilà. Et on va maintenant définir l'accélération. Impuativement, c'est quoi l'accélération ? L'accélération, c'est la variation de vitesse au cours du temps. Plus vous avez un véhicule puissant, plus l'accélération s'agrande. La variation de vitesse que va être capable d'effectuer une Tesla Model S-Pled va être évidemment beaucoup plus grande que celle que va pouvoir effectuer une Smart ou une Opel Corsa. C'est-à-dire que la variation de vitesse durant un certain interval de temps sera plus grande. L'accélération aussi, c'est clair. Donc, l'accélération, le long de cette trajectoire rectiligne, sera défini comme la limite de delta T qui tend vers zéro du rapport de la variation de la vitesse qu'on vient de définir et de fonction du temps sur l'intervalle de temps infinitesimal. Donc là aussi, on peut l'écrire explicitement. En remplaçant la variation de la vitesse, en l'écrivant comme la vitesse évaluée au temps final, en T plus delta T, moins la vitesse évaluée au temps T, on divise de toutes parts delta T. D'accord ? Alors maintenant, pour simplifier notre écriture, on va remplacer les variations avec des delta par des variations avec des petits D. On aura donc la variation infinitesimal de la vitesse d'EV sur l'intervalle de temps infinitesimal d'été. D'accord ? Donc d'EV, c'est V évalué au temps final, en T plus d'été, moins V évalué au temps initial en T. J'ai simplement remplacé le delta par un petit D. Et puis au passage, il ne faut pas oublier de diviser par d'été. Là aussi, on peut maintenant manipuler algébricement cette relation-là en multipliant le membre de gauche et le membre de droite par l'intervalle de temps infinitesimal, ce qui signifie que la variation infinitesimal de la vitesse, c'est l'accélération pour l'intervalle de temps infinitesimal. Donc localement, on a vraiment

notes

résumé

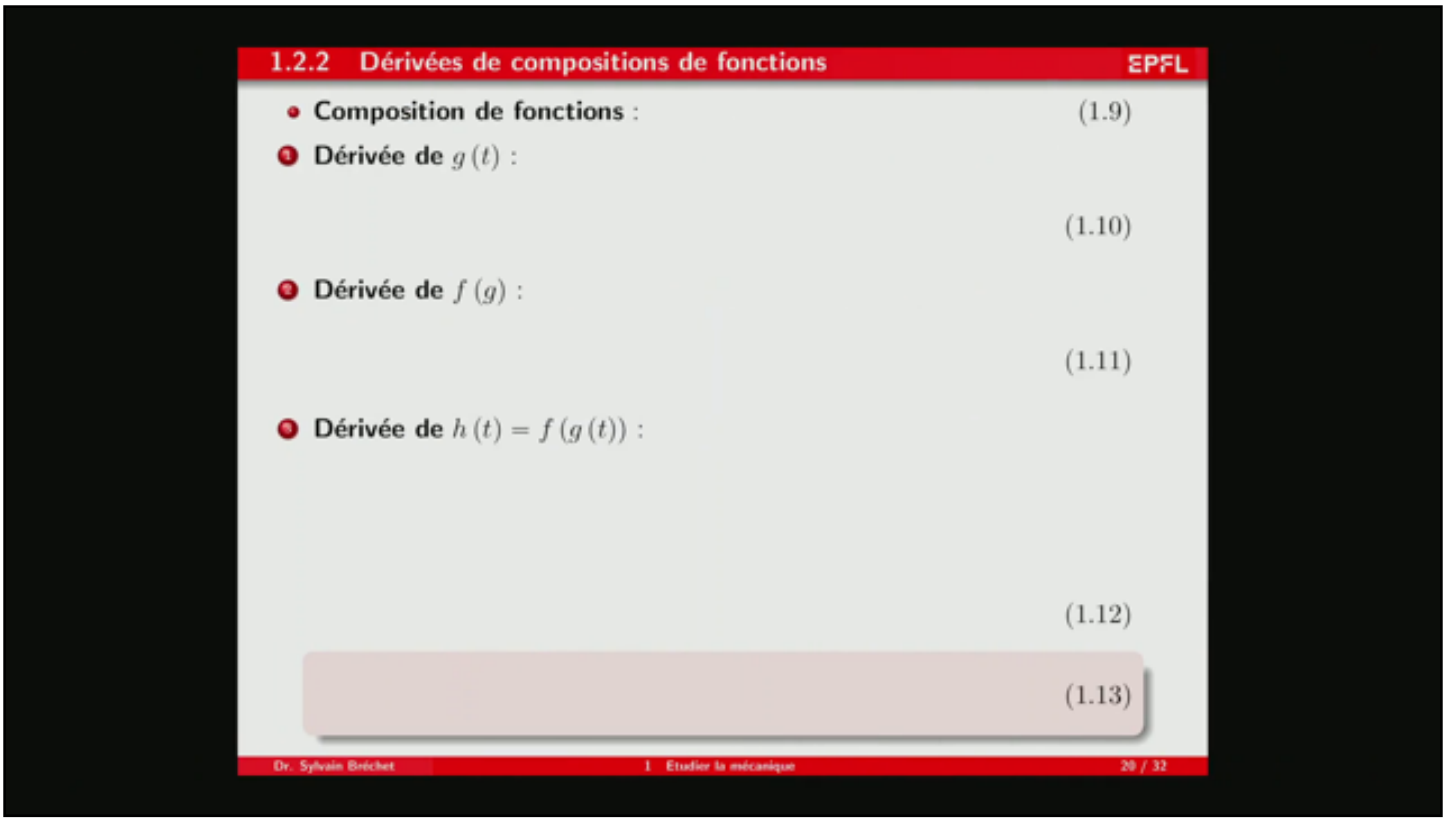
66m 9s



un segment sur un graphe ce qui permet de faire cet exercice. D'accord ? Ça ne serait pas possible si c'était encore une courbe. Bon, alors maintenant, il y a une écriture qu'on peut adopter pour l'accélération comme fonction du temps, compte tenu du fait que la vitesse et la dérivée première de la position par rapport au temps et que l'accélération, la dérivée première de la vitesse par rapport au temps, il s'ensuit que l'accélération et la dérivée seconde de la quantité de position par rapport au temps. Oui, vous avez une question ? Le DTS, c'est la nuit de... Exactement. Vous imaginez un intervalle de temps, une seconde, une heure, un millénaire, d'accord ?

notes

résumé

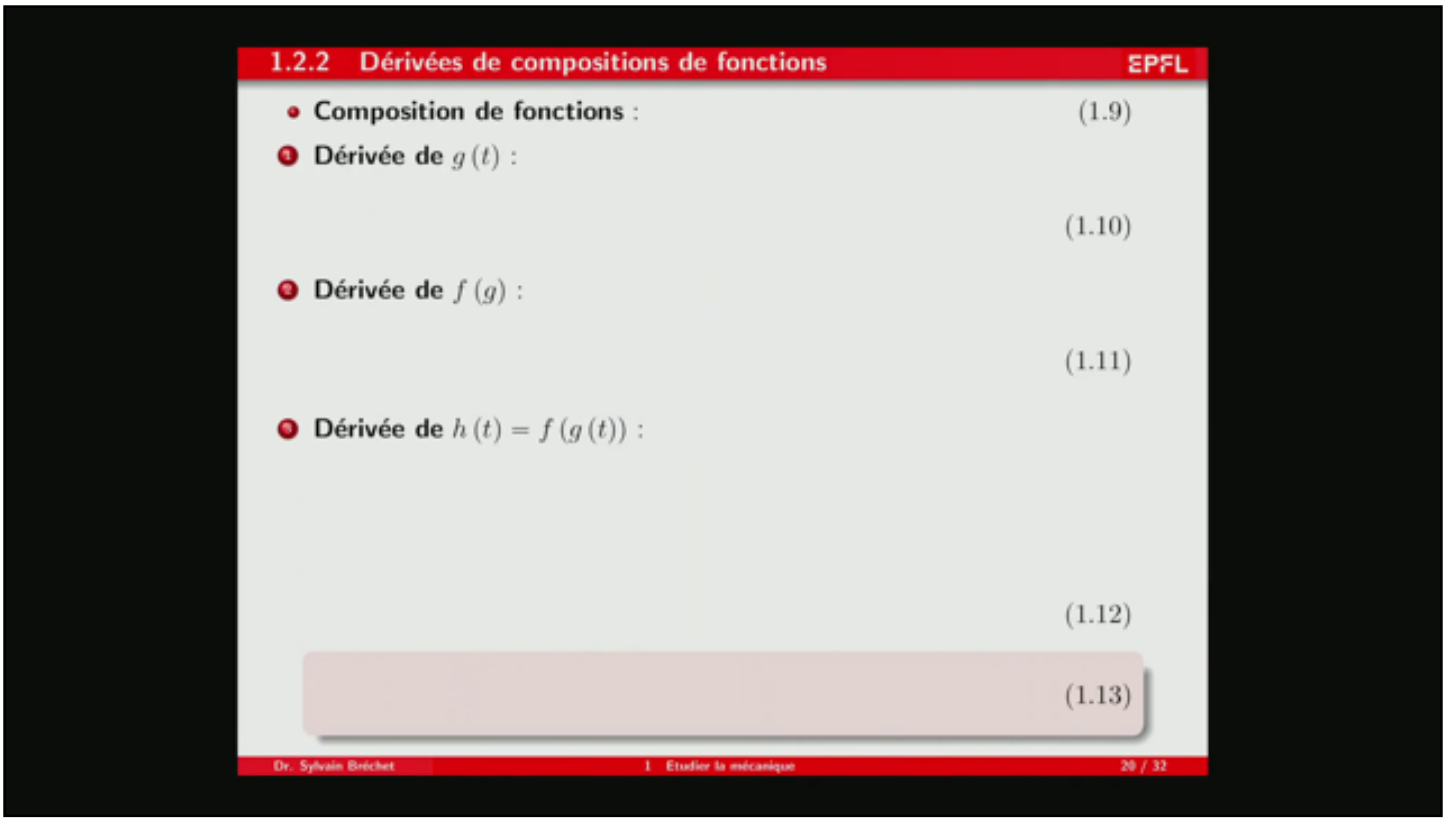


Puis cet intervalle de temps, vous le faites tendre vers quelque chose qui est aussi petit que vous voulez. Donc attention, DT n'est pas nul, mais il est tout petit. Alors, pour si on veut avoir une image physique, on pourrait par exemple faire tendre DT vers le temps de Planck de l'ordre de dispicence de moins de 33 ou moins de 34 secondes, d'accord ? Quelque chose de tout petit. Par exemple, OK ? Bon, alors, comme l'accélération, on l'a dérivée seconde, de la position, on l'écrit comme ça et je vous expliquais pourquoi dans quelques instants, c'est D²X, attention, le carré se met après le D et pas le X, d'accord ? Sur DT², là, le carré se met après le T. Pourquoi ? On va le découvrir. On applique la définition. On prend la limite de delta T qui tend vers zéro et ce qu'on veut, c'est le rapport d'un variation de la vitesse sur la variation du temps. Donc, on a la variation de quoi, de la vitesse, et cette vitesse est elle-même une limite. C'est la limite de delta T qui tend vers zéro, de delta X, de T sur delta T, d'accord ? Et on divise de toutes par delta T. Alors, maintenant, on utilise notre notation qui consiste à remplacer les deltas par des petits D, OK ? On aura donc D de dx de T sur DT le toutes divisé par DT, d'accord ? Donc, on a D sur DT de dx sur DT. On peut donc récrire l'accélération c'est D sur DT qui est une dérivée par rapport au temps, de la dérivée par rapport au temps de X, OK ? qui est dx sur DT. Qu'on peut même écrire comme D sur DT itérée de x de X c'est-à-dire des carré X sur DT carré. C'est de là que vient cette notation, d'accord ? Alors, ceci pour la mécanique c'est

notes

résumé

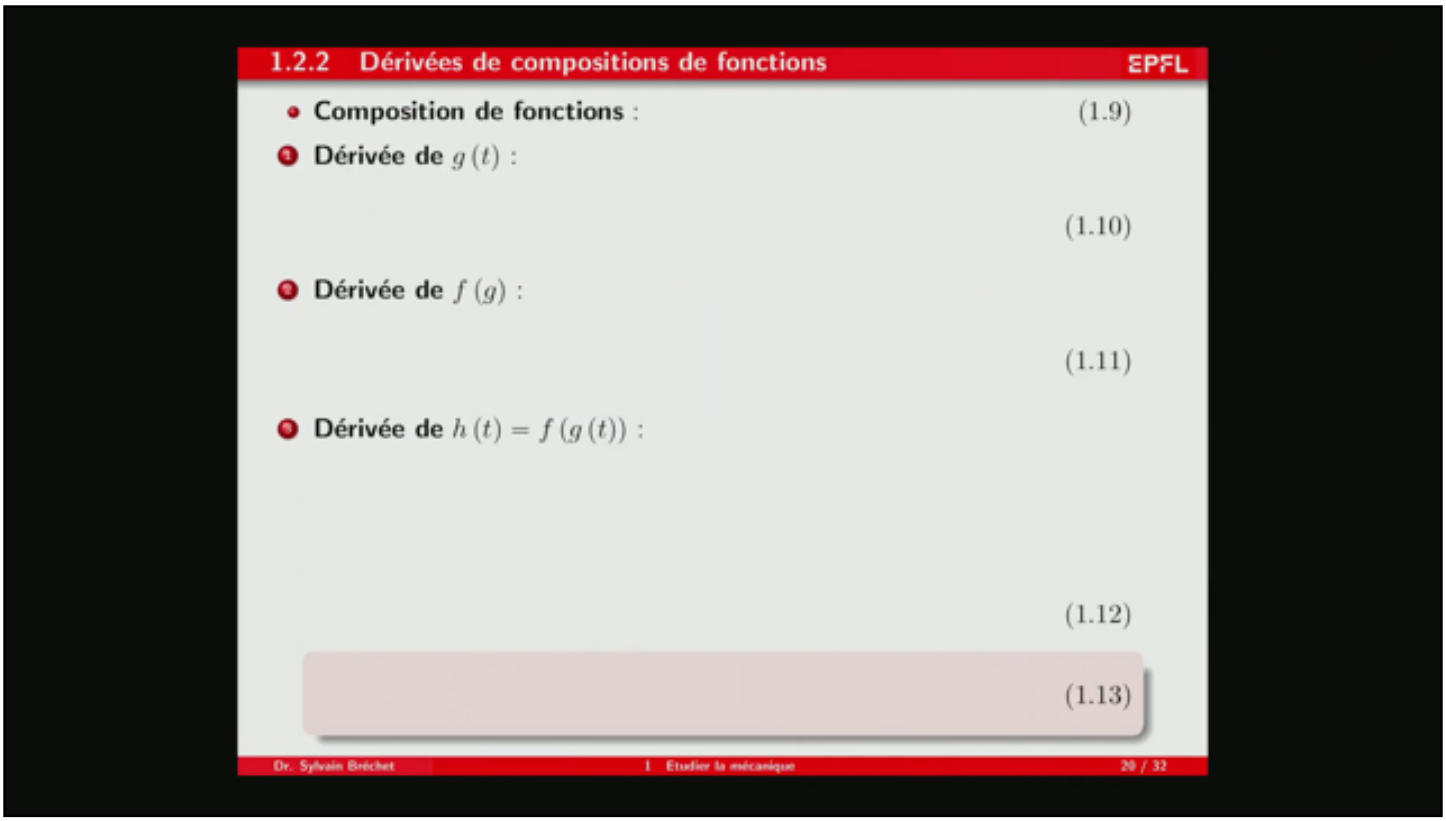
69m 1s



encore trop lourd. C'est déjà mieux que l'écriture avec des limites mais ça reste trop lourd parce que en mécanique on va avoir à tout bout de champ vous allez le voir des dérivées par rapport au temps. Alors, qu'est-ce qu'on peut faire ? On va adopter une notation plus simple, plus belle, plus économique qui sera valable uniquement vous pouvez vraiment le noter c'est uniquement pour des dérivées par rapport au temps et pas par rapport à d'autres variables parce qu'on pourrait dériver par rapport à une cornette position par rapport à un angle, etc. D'accord ? Cette notation c'est la suivante. On va remplacer la dérivée par rapport au temps l'opérateur de dérivée par rapport au temps par un point qu'on va venir poser sur la grandeur. D'accord ? En d'autres termes la vitesse c'est la dérivée temporelle première de la cornette position X, c'est X point tout simplement. D'accord ? Et puis l'accélération c'est la dérivée première de la vitesse c'est donc V point. Oui, mais la vitesse c'est X point. Donc, on peut passer de la position à l'accélération en prenant X point qui est la vitesse et en mettant un point supplémentaire donc on a deux dérivées successives par rapport au temps c'est X point point. D'accord ? Rassurez-vous tout de suite vous n'aurez pas de X point point point. On va s'arrêter à l'ordre 2. D'accord ? Voilà. Vous comprendrez pourquoi la semaine prochaine. D'accord ? En réalité, je vous le vend déjà le mouvement naturel d'un corps est un mouvement qui se fait à vitesse constante donc décrit par des vitesses avec un seul point et donc pour voir comment ce mouvement un mouvement particulier disons est décrit il faut aller au-delà il faut introduire une accélération et donc c'est pour ça qu'on s'arrête en général en mécanique à l'ordre 2. D'accord ? Voilà. Donc maintenant qu'on a vu ces exemples de dérivée

notes

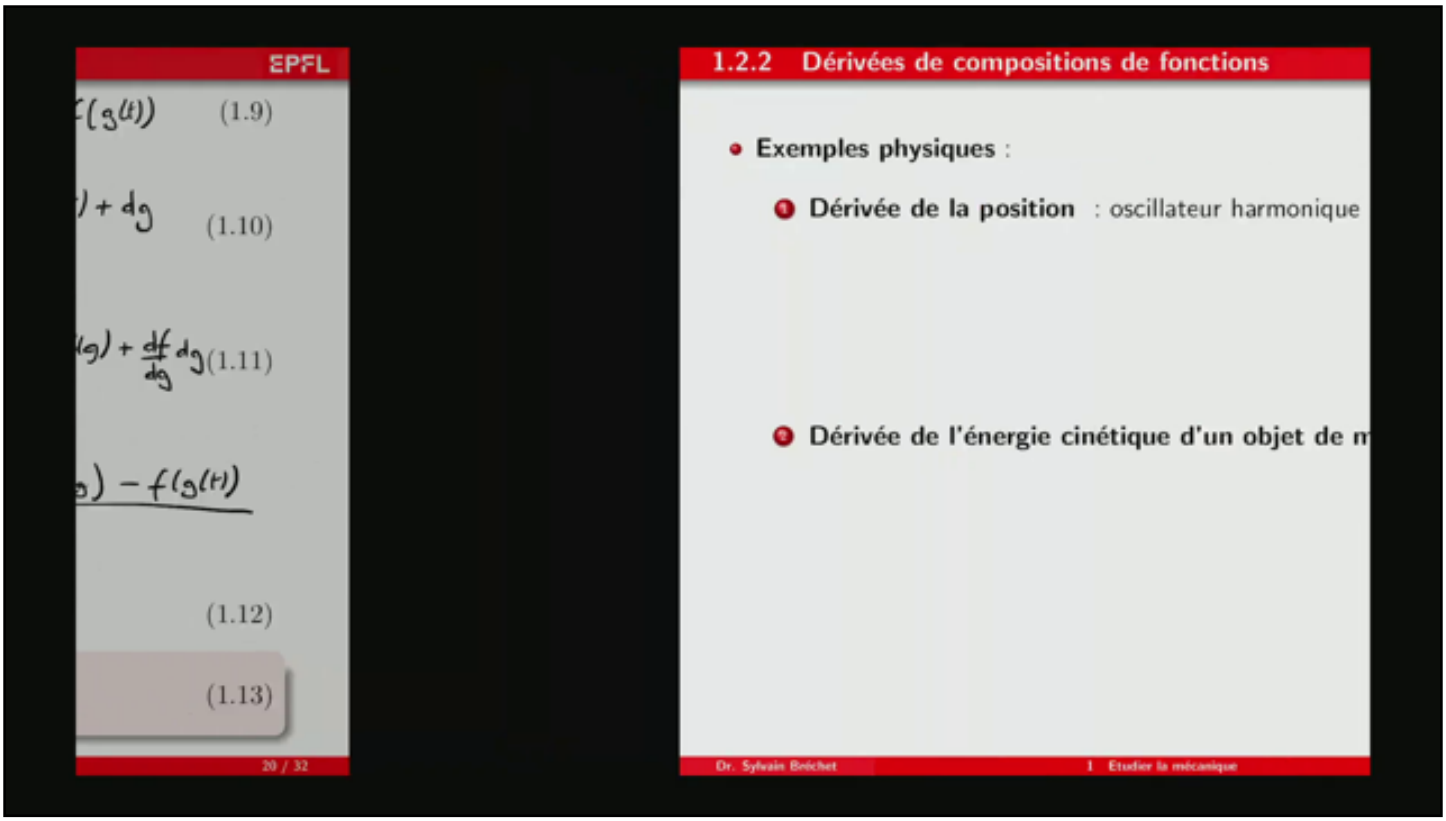
résumé



de fonctions

notes

résumé

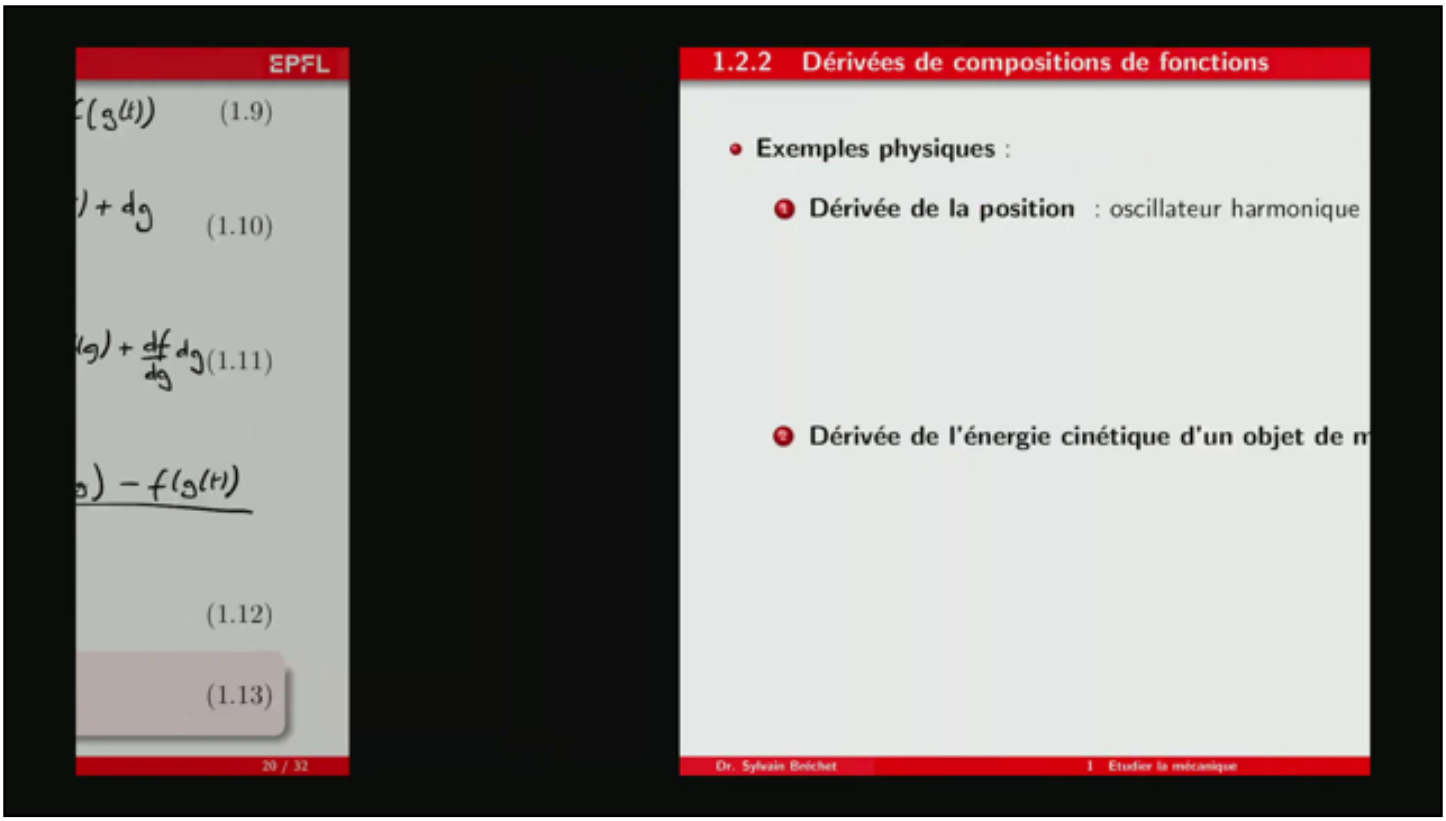


on va s'intéresser à des dérivées de composition de fonctions. Supposons qu'on ait une fonction H du tenté qui soit la composition d'une fonction G avec une fonction F les compositions se font de la droite vers la gauche en mathématiques. D'accord ? Donc c'est G avec le rond ici et le F d'accord ? qui formellement est une fonction du tenté. Alors c'est quoi ? C'est une fonction interne G de la variable T qui est elle-même l'argument d'une fonction externe dont la variable et la fonction G. Ok ? C'est ça la structure. Et on va dériver ceci par rapport au temps. On a 2 plures d'oignons on a la plure interne qui est la fonction G de la variable et on a la plure externe qui est F de G. Ok ? Interressons-nous à la plure interne. On veut donc prendre la dérivée temporelle de G qui est dG sur dT la variation infinitésimale de G divisé par l'intervalle de temps infinitésimale dT. D'accord ? On vient de voir la définition CG évaluée au temps final en T plus dT moins G évaluée au temps T de toute sur dT. On peut donc en conclure que G évaluée en T et plus dT est en fait G évaluée en T plus une petite correction infinitésimale qui est un dG. D'accord ? Maintenant on a traité la plure interne on veut traiter la plure externe ou l'argument de la fonction externe F c'est la fonction interne G. D'accord ? Donc on veut la dérivée de F par rapport à G CDF sur dG. Ok ? C'est la même structure C'est la même structure que pour G dT il suffit de remplacer le temps par G et G par F. Donc on prend F qu'on évalue à la valeur finale de G qui est G plus dG moins F évaluée à la valeur initiale qui est G de toute

notes

résumé

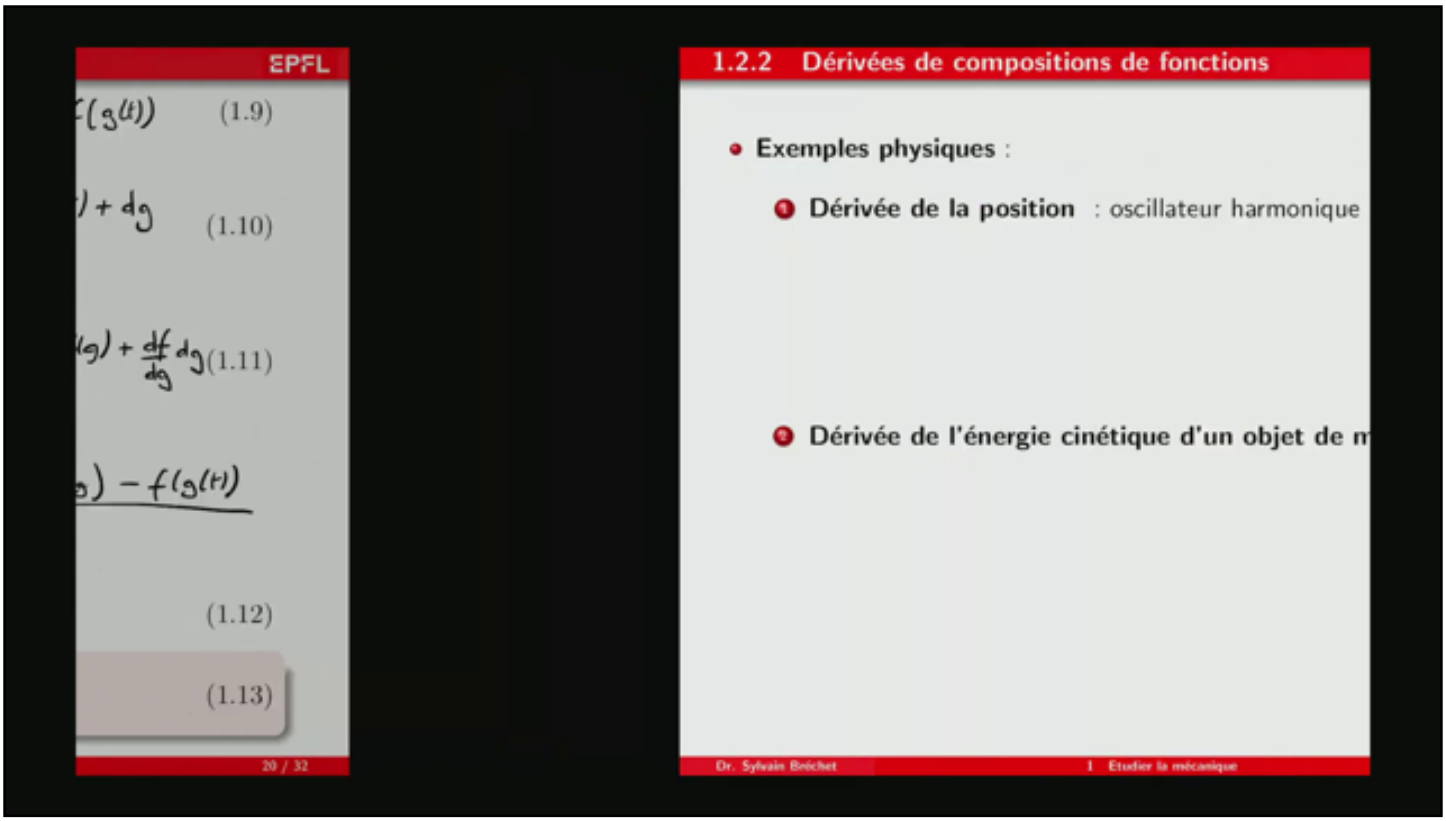
72m 54s



sur dG Bon alors maintenant on peut en tirer F évaluée en G plus dG qu'on va écrire comment ? En multipliant par dG à gauche et à droite on peut récrire ceci comme F de G plus dF Et ce dF on va le remettre un tout petit peu en forme on va le diviser par dG vous allez voir pourquoi et au passage on va le multiplier par dG comme c'est des fractions on va le droit de faire ceci d'accord ? Bon alors maintenant on se lance et on calcule la dérivée de H par rapport au temps donc il va falloir évaluer H au temps final en T plus dT Pih c'est quoi ? c'est la fonction F de la fonction G de l'argument qui est le temps au temps final c'est-à-dire en T plus dT moins F de G évaluée au temps initial en T d'accord ? de toute sur dT Bon alors là on va utiliser la relation indice pourquoi ? parce qu'on va travailler de l'intérieur vers l'extérieur et on va remettre en forme ceci G évaluant T plus dT c'est G évaluant T plus dG donc équivant ceci on a F de G évaluant T plus dG pour l'instant on garde le dernier terme qui est F évalué en G évaluant T d'accord ? le tout sur dT et là on aura besoin de l'autre relation qu'on vient d'introduire la relation un 11 pour travailler toujours encore sur le premier terme qui se trouve ici on a une dépendance en T qu'on n'avait pas noté ici mais c'est pareil F évaluant G si vous voulez G de T plus dG c'est F de G F de G de T d'accord ? plus dF sur DG fois DG très bien donc équivant cela on a donc F évaluant G évaluant T plus dF sur DG fois DG moins F de G de T

notes

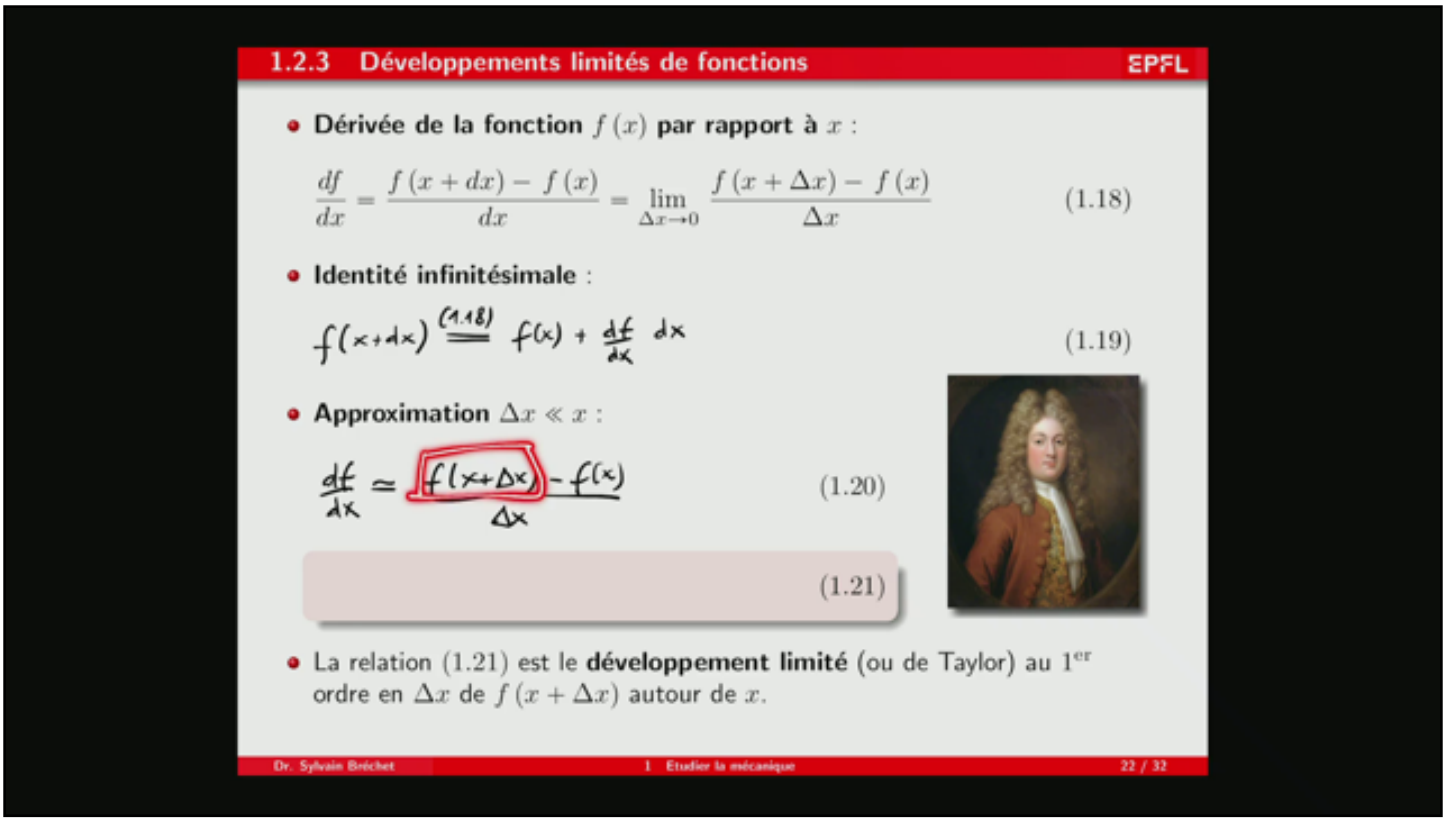
résumé



de toutes sur dT alors qu'est-ce qu'on voit ? et c'était le but de l'exercice c'est qu'il y a une petite simplification qui se présente à nous ce terme est l'opposé de celui-ci d'accord ? il s'est simplifié qu'est-ce qui va nous rester ? dF sur DG fois DG sur DG d'accord ? donc la dérivé de H par rapport au temps c'est la dérivé de la composition des fonctions G et F d'accord ? par rapport au temps qui formellement je l'écris mathématiquement et on va discuter c'est dF sur DG fois DG sur DT DG sur DT c'est la dérivé de la fonction interne c'est la dérivé interne d'accord ? dF sur DG c'est la dérivé de la fonction externe par rapport à sa variable qui est la fonction interne et donc quand vous avez une composition de fonction d'une variable ici le temps d'accord ? lorsque vous dérivez par rapport à la variable vous avez le produit de la dérivé externe fois la dérivé interne ceci est absolument essentiel il faut que vous compreniez tout ce concept d'accord ? on va l'employer de manière régulière et intensive dans l'ensemble de ce cours alors je vais vous donner deux exemples de ceci le premier

notes

résumé

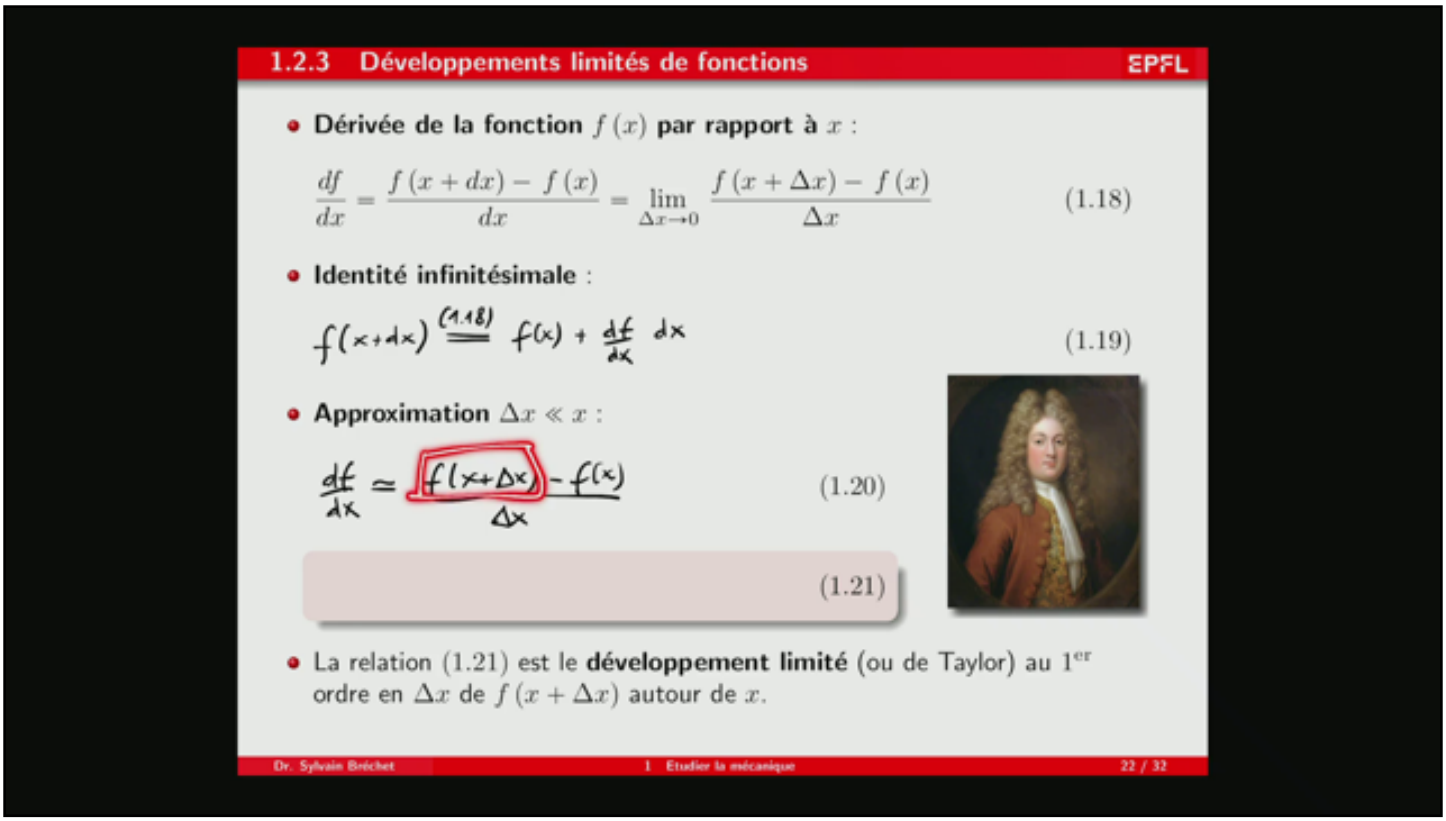


c'est la dérivé de la position d'un oscillateur armé lorsqu'on a un objet une masse qui est suspendue à un ressort et qui aussi selon un axe horizontal la coordonnée de position X2T va être de la forme une amplitude A fois le cosineus d'une fonction du temps qui est la pulsation omega fois le tenté plus un angle de défaisage fi on explique en détail comment on arrive à cette solution au chapitre 4 alors la première chose à voir ici c'est que vous avez une fonction externe qui est une constante A qui multiplie le cosineus d'un argument ce cosineus de l'argument c'est la fonction externe et l'argument lui-même c'est la fonction interne donc la fonction du temps la fonction interne la fonction g si vous voulez c'est omegaT plus fi ou omega et fi sont des constantes la fonction externe c'est A du cos de l'argument donc on applique la règle de cuisine pour calculer la dérivé de X par rapport au temps c'est la dérivé de A fois le cosineus de omegaT plus fi par rapport à la fonction interne qui est l'argument du cosineus soit omegaT plus fi d'accord ensuite on a la dérivé interne qui est la dérivé de l'argument du cosineus soit omegaT plus fi dérivé par rapport au temps ça c'est la dérivé de F par rapport à g et on a la dérivé de g par rapport à t qui est la dérivé de H par rapport à t d'accord alors la dérivé du cosineus d'un argument par rapport à l'argument on va l'établir ensemble cet après-midi la dérivé du cosineus c'est l'opposé du sinus d'accord on a A qui est une constante qu'on va mettre en évidence et puis si on prend omega qui est une constante et fi qui est une constante lorsqu'on dérive une fonction linéaire du temps qui est omegaT plus fi par rapport au temps il

notes

résumé

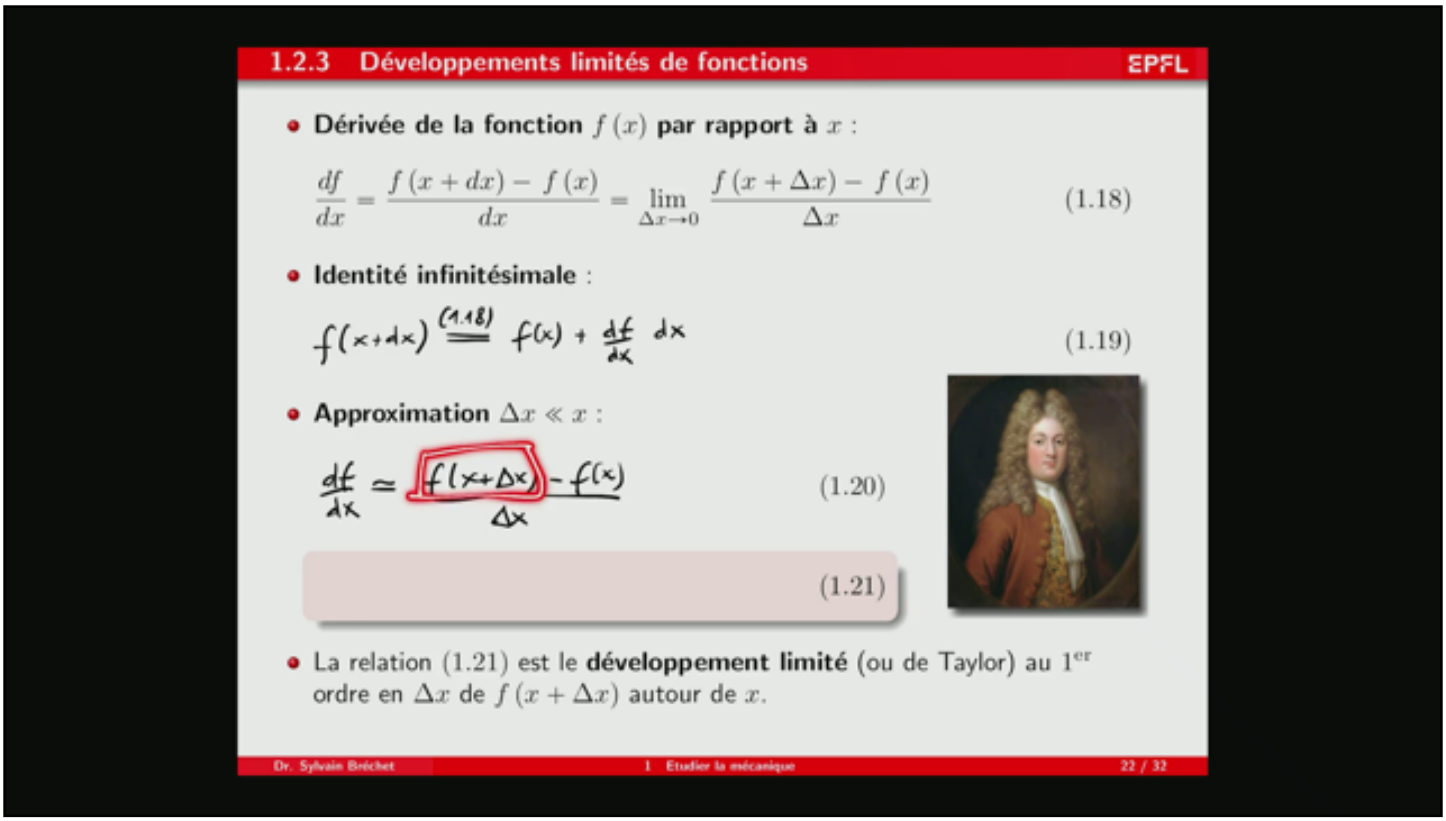
78m 24s



nous reste un facteur qui multiplie le temps à savoir omega donc on va se retrouver avec dX sur dt qui est la vitesse de l'océateur harmonique qui est moins A fois omega fois le sinus de omegaT plus fi quand peut-être qu'on vous l'a présenté au lycée, au collège, au gymnase là vous voyez comment on peut faire explicitement cette dérivé temporaire un autre exemple qui va aussi être très parlant c'est l'énergie cinétique d'un objet qu'on assimile un point un objet de masse m donc cette énergie cinétique grandet qui dépend du temps petit et c'est une de mi de la masse fois la vitesse au carré maintenant la vitesse pour un mouvement qui a lieu selon un axe horizontal X c'est la dérivé temporelle de la position c'est X point qu'on va évidemment élever au carré maintenant ce qu'on cherche à faire c'est de calculer la dérivé de cette énergie par rapport au temps on aimerait savoir comment l'énergie cinétique va varier au cours du temps alors on écrit des de grandet sur des de patite d'accord la dérivé de l'énergie cinétique par rapport au temps et là surtout on identifie tout d'abord la fonction externe c'est une demi de la masse fois la vitesse au carré mais la vitesse elle varie c'est une fonction du temps c'est même ce qui fait l'intérêt parce qu'il est constante dérivé nul d'accord donc la fonction interne fonction interne qui est une fonction du temps la variable sept temps c'est la vitesse c'est des points donc on a une fonction externe qui est une demi de m de X point au carré qu'on va dériver par rapport avec ce point d'accord qui est la fonction interne et il faudra encore prendre la dérivée interne qu'il a dérivée de X point par rapport au temps donc concrètement on a la dérivée de une demi de m X point carré par rapport

notes

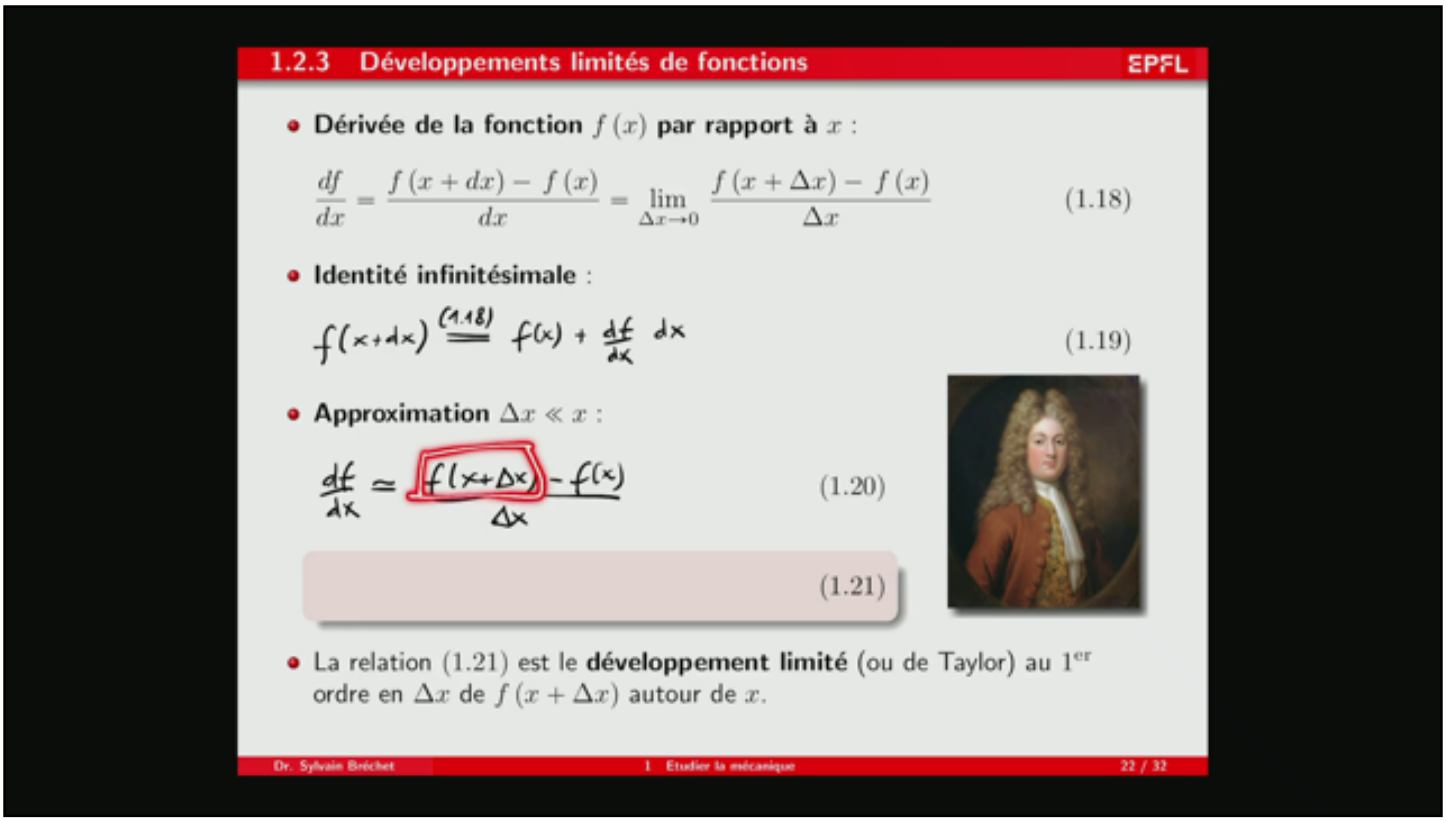
résumé



à X point la dérivée externe fois des X points sur l'été qu'il a dérivée interne bon alors quand vous dérivez une demi de m X point carré par rapport à X point dérivons disons X point carré par rapport à X point c'est deux X points le facteur 2 et le facteur une demi c'est simplifié il va nous rester un m X point écrivons-le on a un m X point et puis la dérivée par rapport au temps de X point c'est X point point alors on a m X point X point point c'est pas très parlant mais comme c'est des grandeurs scalaires on a le droit de faire une chose c'est des commutés et c'est ce qu'on va faire et là ça va être beaucoup plus parlant on va l'écrire comme m X point point fois X point ceci le premier terme qu'il a représente le produit d'une masse fois quoi une accélération ce qui est exactement exactement donc vous avez ici une force et puis le deuxième terme c'est une vitesse le produit d'une force point de vitesse c'est presque exactement c'est la puissance d'accord donc voyez que la dérivée temporelle de l'énergie scientifique va être directement liée à la puissance on traitera sort des tailles quand on intégrera les lois du mouvement et on fera ça dans le chapitre 7 de ce mouvement d'accord ? parlons encore rapidement du développement limité le développement limité c'est une approximation d'accord ? si vous avez une fonction pas très sympathique prenant une fonction trigonométrica sinus ou incosinus par exemple ben il serait intéressant de se dire mais que va valoir ce sinus ou ce cosinus si par exemple disons l'argument est petit d'accord ? est-ce qu'on peut avoir une approximation du sinus ou du cosinus ? graphiquement que vaudrait par exemple la tangente au graphe d'accord ? c'est un peu ça l'idée pour un développement limité du

notes

résumé



premier ordre bon alors comment va-t-il prendre ? eh bien on a la définition ici c'est parce que je voulais on a la définition ici de la dérivée d'une fonction F par rapport à sa variable X d'accord ? qu'on peut écrire aussi à l'aide de la limite donc maintenant imaginons qu'on prenne la fonction F qu'on veut évaluer en X plus DX et on veut la comparer à F évaluant X d'accord ? alors on reprend la définition qui est ici on multiplie par DX à gauche et à droite d'accord ? et alors on parvient à écrire ceci sous la forme suivante F évaluant X plus DX c'est F évaluant X plus DX plus la dérivée de F par rapport à X en concrètement évalué en X fois DX d'accord ? ça c'est absolument exact dans la limite infinitesimale alors maintenant supposons qu'on ne soit pas dans la limite infinitesimale donc concrètement on n'a pas un intervalle de temps qui est tout petit c'est pas le temps de planque par exemple mais c'est un intervalle de temps où ça peut être une distance n'importe quoi ça peut être une grandeur d'accord ? qui est suffisamment petite donc si vous voulez on a un delta X qui est suffisamment petit par rapport à X pour qu'on puisse faire l'approximation donc on va prendre tout d'abord la dérivée DX sur DX et on va la récrire à l'aide d'un delta X sans spécifier la limite d'accord ? c'est rigoureusement égal lorsqu'il y a une limite c'est une approximation lorsqu'il n'y a pas la limite donc on récris ceci comme F évaluant X plus DX moins F évaluant X sur delta X d'accord ? bon alors maintenant si on prend cette approximation qu'on vient de faire on peut la manipuler algébricement multiplier par delta X et on extrait F évalué en X plus DX et on a alors que F évaluant

notes

résumé

1.2.3 Développements limités de fonctions

EPFL

- **Dérivée de la fonction $f(x)$ par rapport à x :**

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.18}$$

- **Identité infinitésimale :**

$$f(x+dx) \overset{(1.18)}{=\!=} f(x) + \frac{df}{dx}\, dx \tag{1.19}$$

- **Approximation $\Delta x \ll x$:**

$$\frac{df}{dx} \simeq \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.20}$$

(1.21)



- La relation (1.21) est le **développement limité** (ou de Taylor) au 1^{er} ordre en Δx de $f(x + \Delta x)$ autour de x.

Dr. Sylvain Bréchet | 1 Etudier la mécanique | 22 / 32

x

notes

résumé

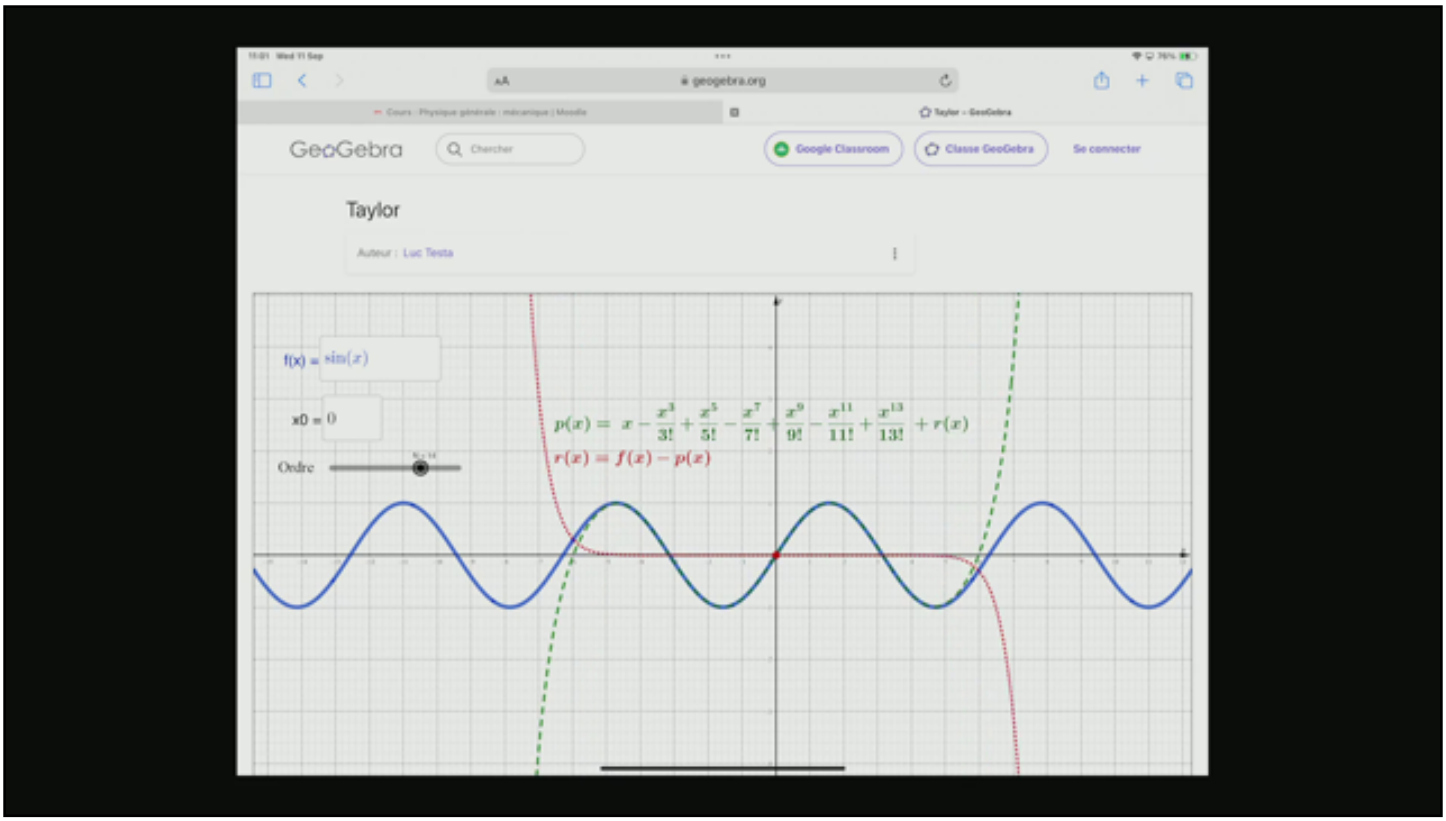


plus delta X c'est à peu près F évalué en X et on a un point F évalué en X plus une correction qui est la dérivé de F par rapport à X pour delta X d'accord ? en d'autres termes si on connaît la fonction F pour une certaine valeur de sa variable X on va pouvoir de manière approchée trouver la fonction F évaluant X plus delta X qui va être la fonction F évalué en X plus une petite correction du premier ordre c'est à dire à l'aide d'une dérivé première de F par rapport à X F évalué en X plus delta X alors comment est ce qu'on pourrait améliorer ce résultat ? vous allez le voir au cours d'analyse durant ce premier semestre il faut ajouter au terme du premier ordre un terme du deuxième ordre en delta X carré plus un terme du troisième ordre en delta X occupé plus un terme du quatrième ordre en delta X à la puissance 4 et ainsi de suite et ainsi de suite maintenant supposons pratiquement que notre delta X soit disons un centième très bien carré ça donnerait ? Oui, exactement et souvent un dix millième c'est quasiment négligeable. D'accord ? Donc dans beaucoup de cas de figure lorsque delta X est petit, on peut s'arrêter au premier ordre et donc vous avez ici le développement limité de Taylor au deuxième ordre. Le terme d'ordre n est de la forme 1 sur n factorial fois la dérivée partiel m ni m de f par rapport à X fois delta X à la puissance n. D'accord ? Et on peut avoir une série Taylor qui est l'ensemble de tous ces termes qu'on va sommer pour approximer le résultat dans la mesure où on se retrouve dans le rayon de convergence de la série. Alors je vous propose de voir un exemple

notes

résumé

86m 13s

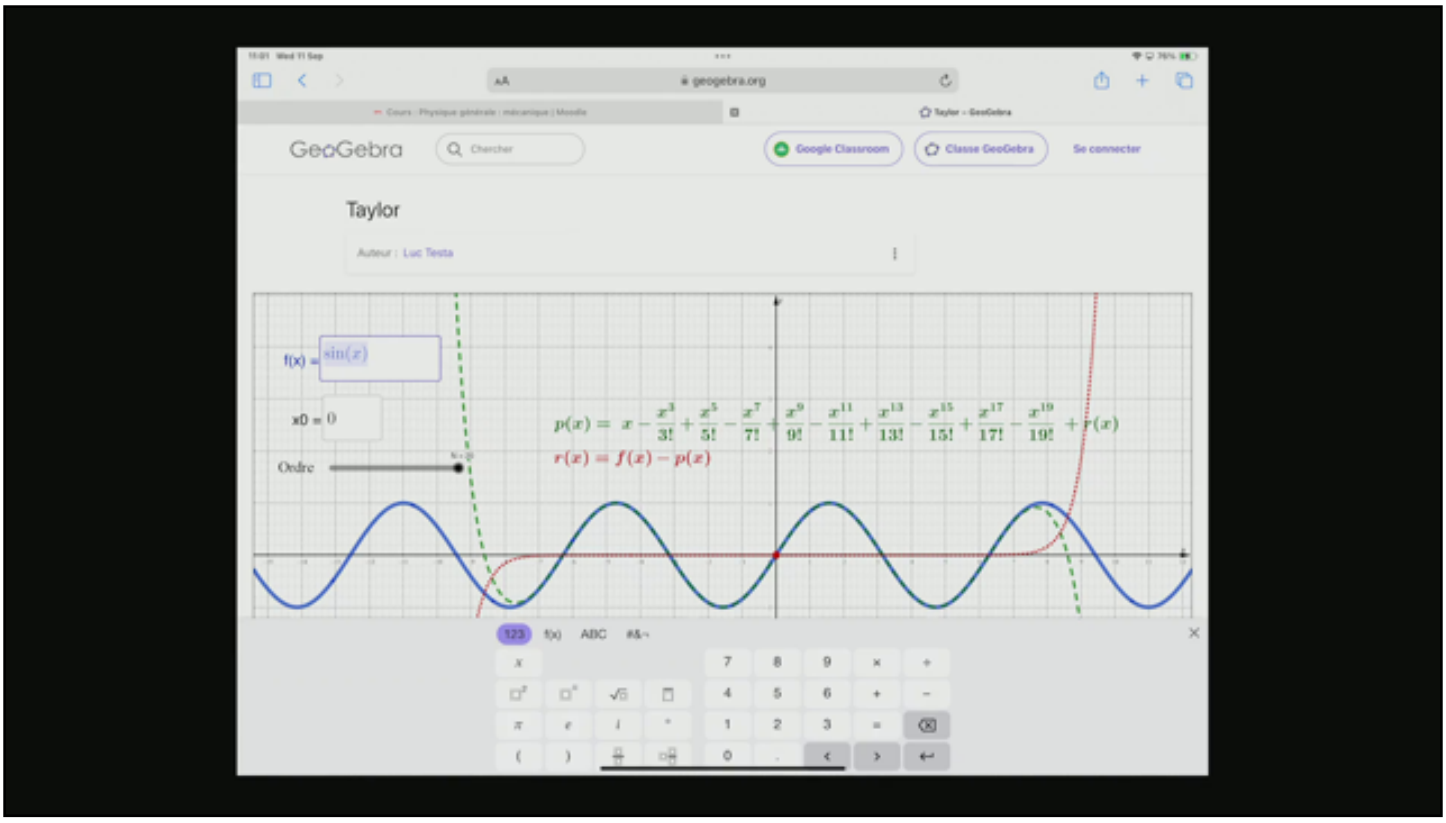


rapidement avant de prendre la pause. Vous avez ici en bleu le sinus, d'accord ? Le sinus 2X. Très bien. Alors on a fait un développement limité du sinus 2X autour de X égal 0. On veut approximer la fonction sinus autour de X égal 0. Comme la fonction sinus est une fonction impère, c'est-à-dire que f de X est égal à moins f de moins X. D'accord ? Les termes qui vont apparaître dans ce développement limité sont des termes impères. Le plus petit terme c'est tout simplement X, vous le voyez tout de suite pourquoi ? Parce que vous avez ici en vert ce développement limité au premier homme et que vous voyez que si X est petit dans la région au centre, la droite qui apparaît en traitillée verte approxime bien la courbe. Alors c'est bon dans une certaine région si X est petit mais rapidement ça vient mauvais. Qu'est-ce qu'on peut faire ? Aller à l'ordre suivant. Au troisième ordre. Au troisième ordre vous avez un terme supplémentaire qui est en moins X cubed sur trois factoriels. Et alors maintenant vous voyez que vous avez une cubique en vert qui approxime mieux votre sinus. Allons à l'ordre un père suivant soit de cinq. Vous voyez qu'on peut faire encore mieux. Le reste est d'ailleurs donné en rouge. On peut aller au septième ordre,

notes

résumé

88m 0s

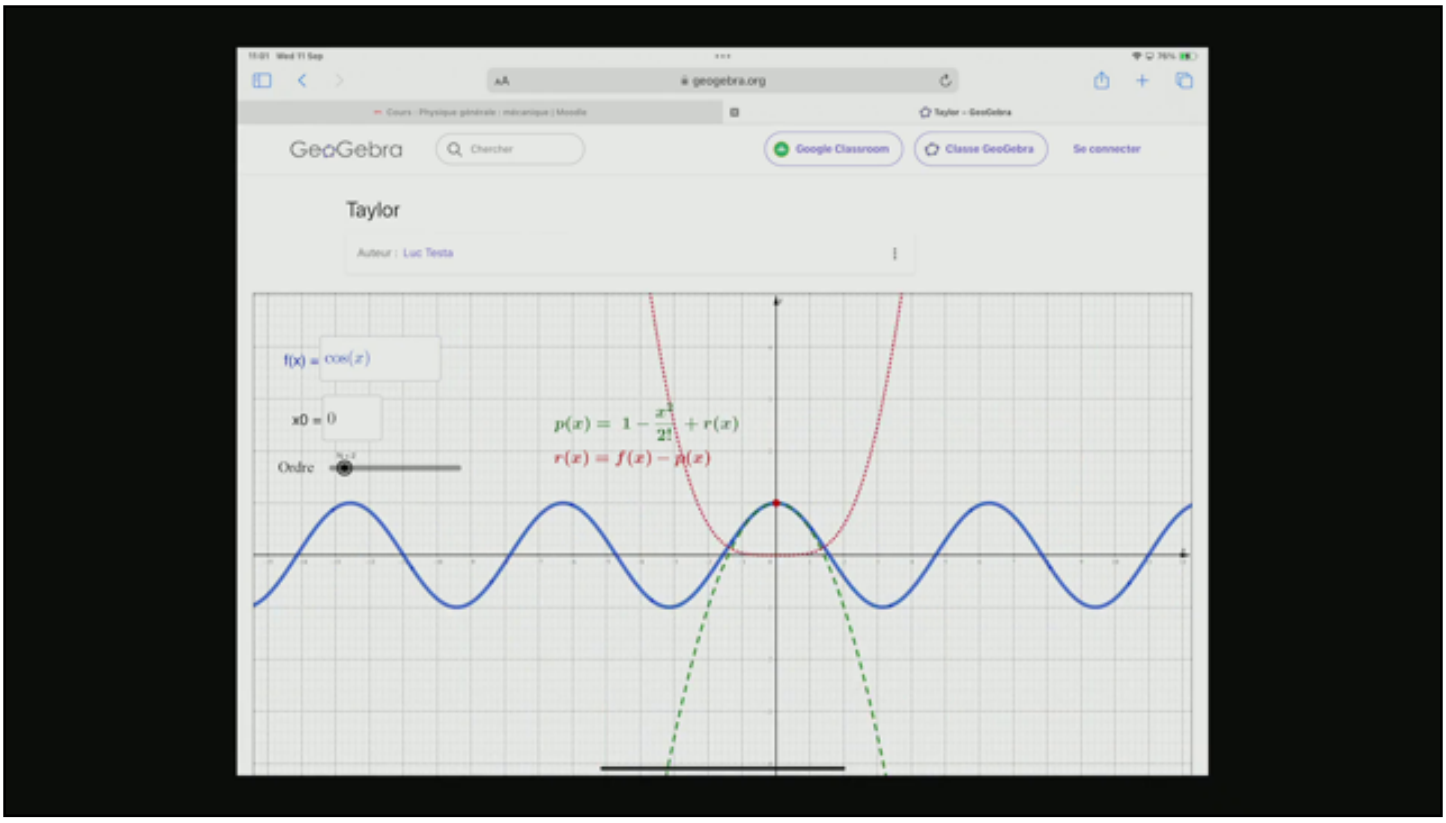


au neuvième ordre, on peut aller au onzième ordre et ainsi de suite. On peut de proches en proches approximer de mieux en mieux. D'accord ? La fonction sinus. Dans la plupart des cas on va nous se restreindre au premier ordre, parfois au deuxième ordre et dans un cas en application de cours, je crois que c'est la troisième semaine, on ira au troisième ordre. D'accord ? On ira pas plus loin. Mais en physique on peut souvent aller au quatrième ou cinquième ordre pour calculer des perturbations notamment en théorie quantique des champs pour établir des diagrammes d'interaction entre particules. On va parfois au quatrième voire au cinquième ordre. D'accord ? On peut le faire aussi

notes

résumé

89m 16s



pour une autre fonction. On pourrait prendre par exemple disons le cossinus, le cossinus de X. Bon, prenons le cossinus de X. Voilà. Et regardons son développement limité au tour de zéro.

notes

résumé

89m 51s

1.3.1 Repère direct

EPFL

- **Vecteur** : élément de droite orientée (norme, orientation)

- **Repère** : entité géométrique constituée de trois vecteurs linéairement indépendants attaché à un point (origine).



- **Repère orthonormé** : les vecteurs de base sont orthogonaux et de norme unité (deux types)



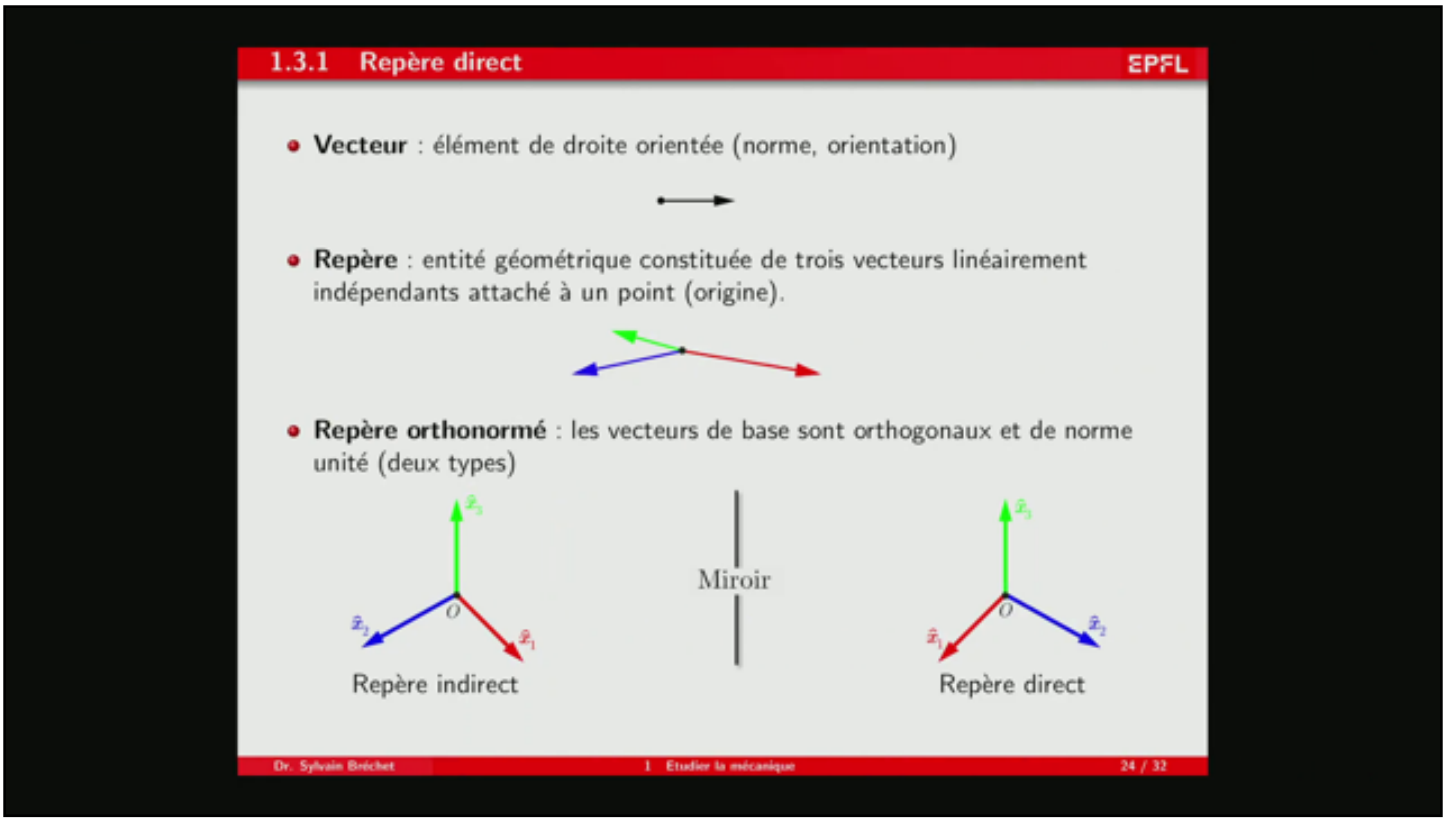
Repère indirect

Repère direct

notes

résumé

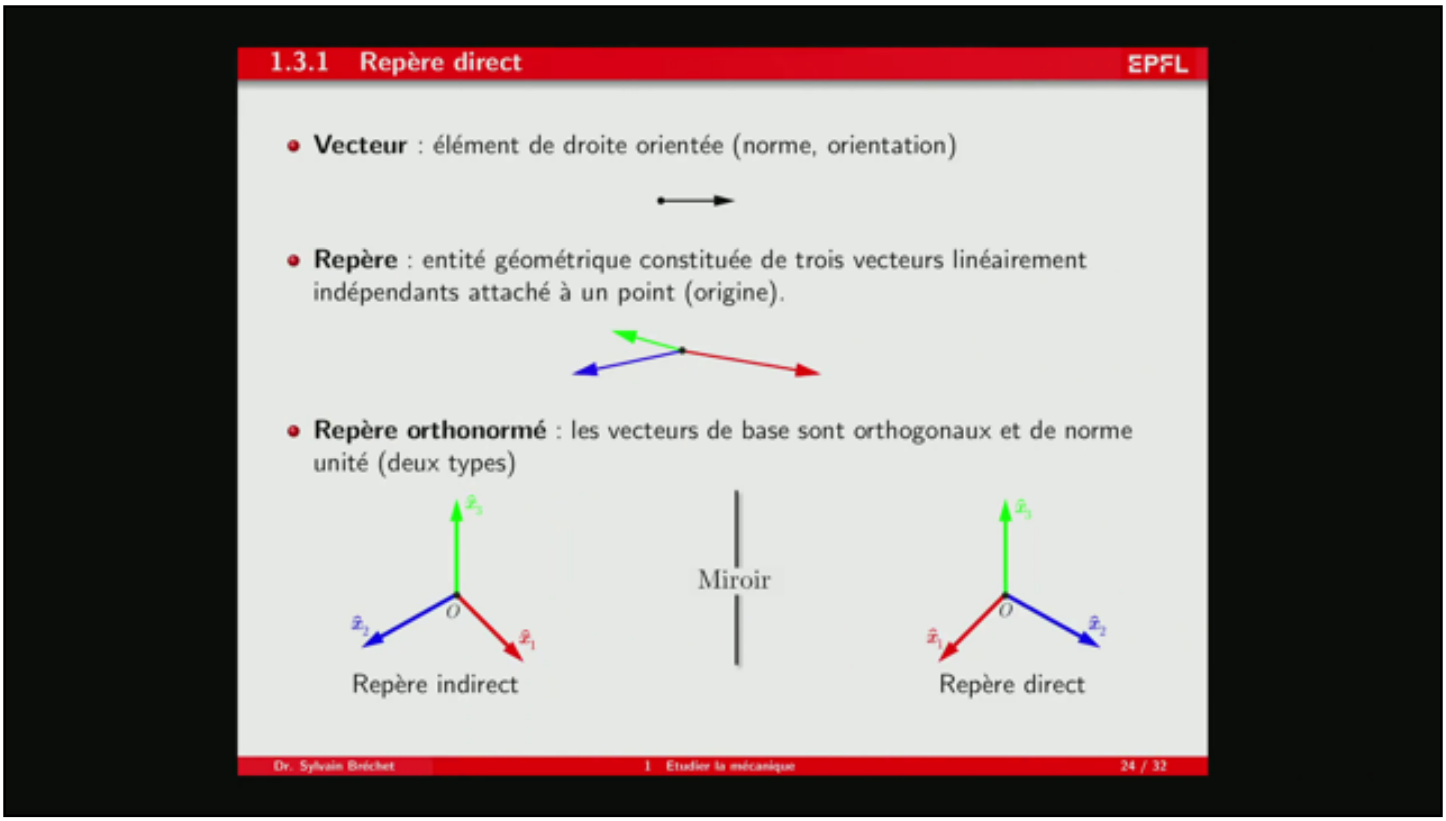
90m 2s



qui est la théorie des groupes et l'analyse fonctionnelle. La théorie des groupes, qui permet de simplifier, d'exploiter les symétries pour arriver aux solutions. Elle analyse fonctionnelle, c'est justement l'étude. Si vous voulez des bases propres, si vous pensez à l'algebrainaire avec des bases propres, c'est des bases propres que vous allez trouver dans des espaces de fonction. D'accord ? Voilà, le cours va reprendre. La mécanique décrit le mouvement d'objet qui se déplace dans l'espace. Donc clairement, quand on veut décrire un mouvement de manière générale, qui n'est pas forcément un mouvement rectiligne, on aura besoin de repérer un point et son mouvement dans l'espace. Et comment est-ce qu'on va faire ceci ? On va le faire à l'aide de flèches qui sont des vecteurs. Alors, en mathématiques, le concept de vecteur est très général. Les polynômes peuvent être des éléments d'un espace vectoriel. Les matrices peuvent être des éléments d'un espace vectoriel. Les vecteurs dans Rn ou n égale 3 est un cas particulier, ou n égale 2 est un autre cas particulier, sont aussi des éléments d'un espace vectoriel. Vous pouvez même avoir des relations d'épendance linéaire en des vecteurs qui sont eux-mêmes des vecteurs d'un espace vectoriel abstrait. Donc il y a beaucoup de possibilités. Ce n'est pas exhaustif la liste que je viens de vous donner. Mais en physique, ça sera beaucoup plus pédestre. Pour nous, un vecteur, c'est une flèche dans R2 ou dans R3, dans l'espace à 2 ou à 3 dimensions. Cette flèche, ce vecteur, c'est l'élément fondamental, qui est un élément de droite orienté. Ces éléments, dans un espace vectoriel, on peut les multiplier pour obtenir soit un scalère, soit un vecteur. Le produit de deux vecteurs qui nous retournent à un scalère et le produit scalère, évidemment que le produit de deux vecteurs qui nous retournent à un vecteur, c'est le produit vectoriel. Je suis conscient qu'un certain nombre d'entre

notes

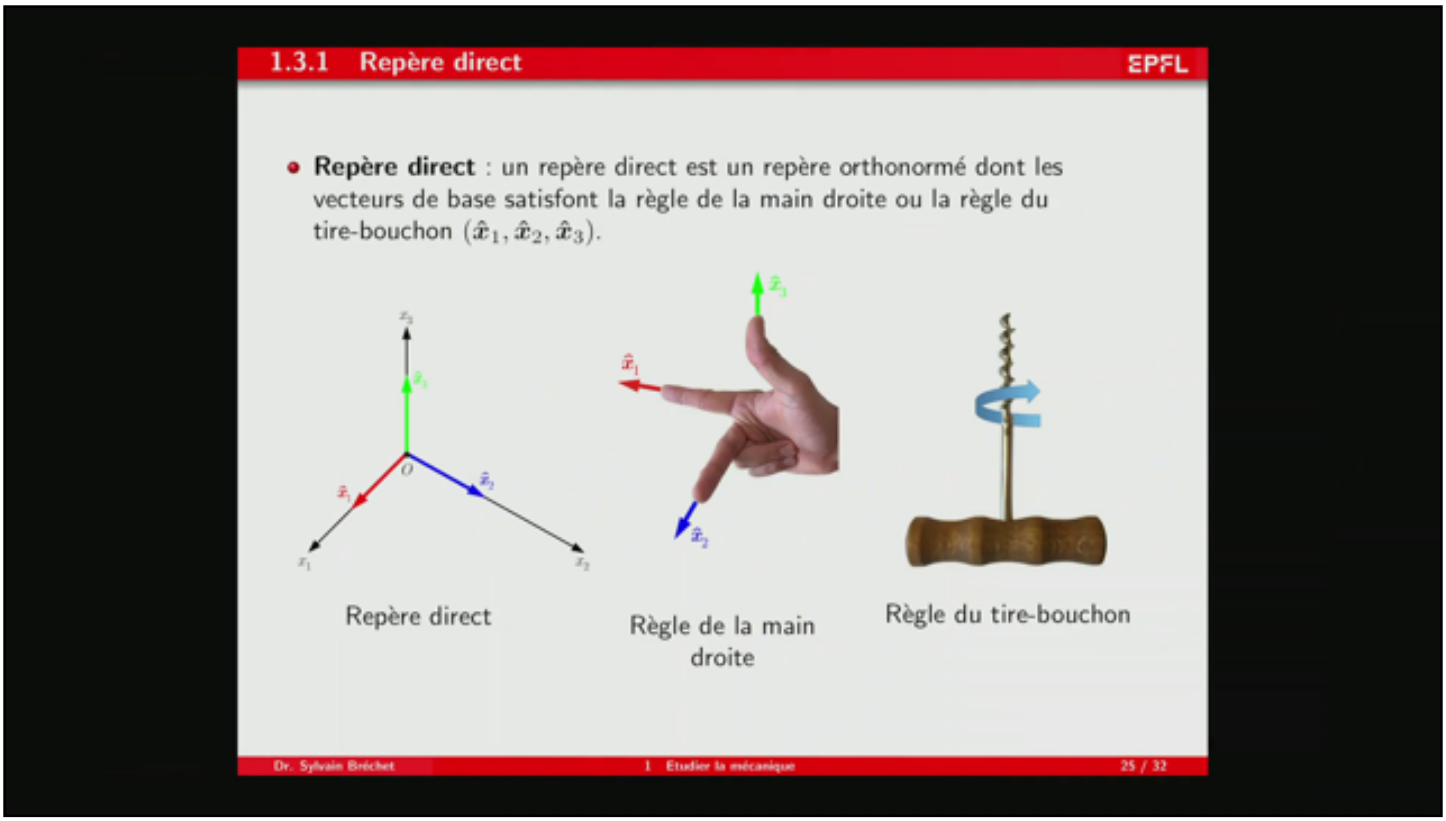
résumé



vous n'avez jamais vu le produit vectoriel. On va en discuter en détail. Il y a aussi un produit qui est combiné, qui est le produit mixte où vous avez un produit scalaire de deux vecteurs, dont l'un est le résultat de produit vectoriel entre deux vecteurs.

notes

résumé

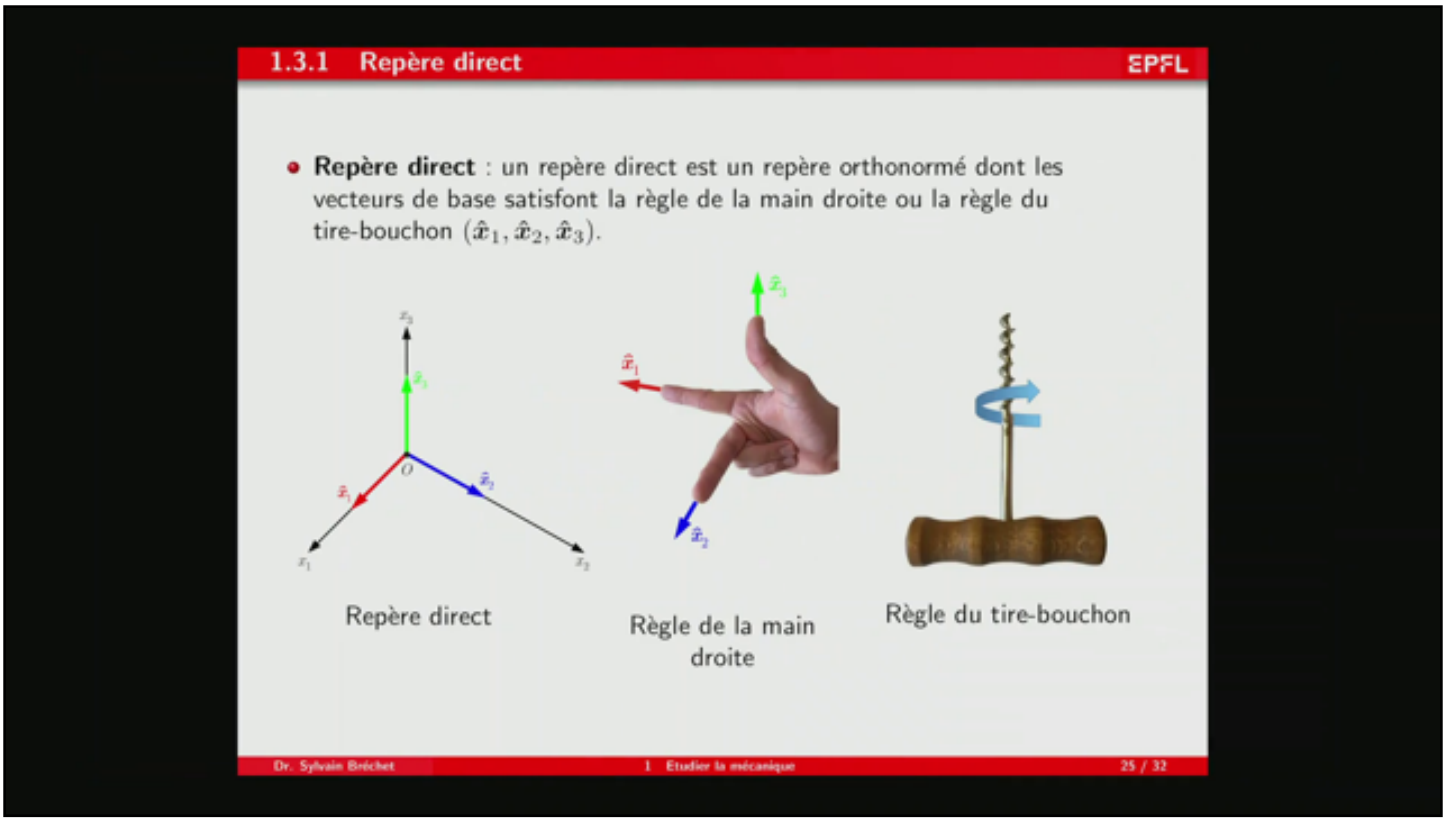


On terminera avec une identité vectoriale. Comme je le disais, un vecteur, c'est un élément de droite orienté. Vous prenez une droite dans l'espace à 2 ou 3 dimensions. Vous prenez un segment et vous lui donnez une orientation vers une extrémité de la droite, soit vers l'autre extrémité. Cet élément de droite orienté, ça pourrait être mon style ici avec la flèche, à une norme, une longueur, et une orientation dans l'espace. Mais un vecteur n'est pas défini par le point auquel il est rattaché. Ce qui veut dire que si je prends ce style là qui est horizontal, orienté de votre gauche vers votre droite, si je le déplace verticalement, que je le déplace horizontalement, qui garde son orientation, qui garde sa longueur, c'est le même vecteur. Ça, c'est très important pour la suite. Alors maintenant, pour pouvoir définir des vecteurs dans l'espace à 3 dimensions, il va nous falloir une base au sens de l'algebra. Une base de 3 vecteurs de référence. Ces vecteurs de référence doivent être non-coplanaires. Il faut qu'ils soient dans le jargon de l'algebra linéaire, linéairement indépendants à vos souhaits. Vous pourriez par exemple prendre les 3 vecteurs que vous voyez ici, d'accord qu'ils ne seront pas dans le même plan. A l'aide de 2 vecteurs, par exemple le rouge et le bleu, vous définissez un parallélogramme dans un plan. Ensuite, à l'aide du 3e vecteur, vous allez définir un pris dans l'espace. Alors est-ce que vous pouvez prendre ces 3 vecteurs comme base ? Bien sûr que vous pouvez le faire. Est-ce que c'est un bon choix ? Non, c'est pas un bon choix. Pourquoi ? Parce que vous êtes mathématicien, que vous aimez la symétrie et que intuitivement vous avez à l'esprit des concepts de théorie des groupes, vous voulez que ce soit symétrique, le plus symétrique possible. Alors comment est-ce, comment le rendre symétrique ? Premièrement, on va s'arranger pour

notes

résumé

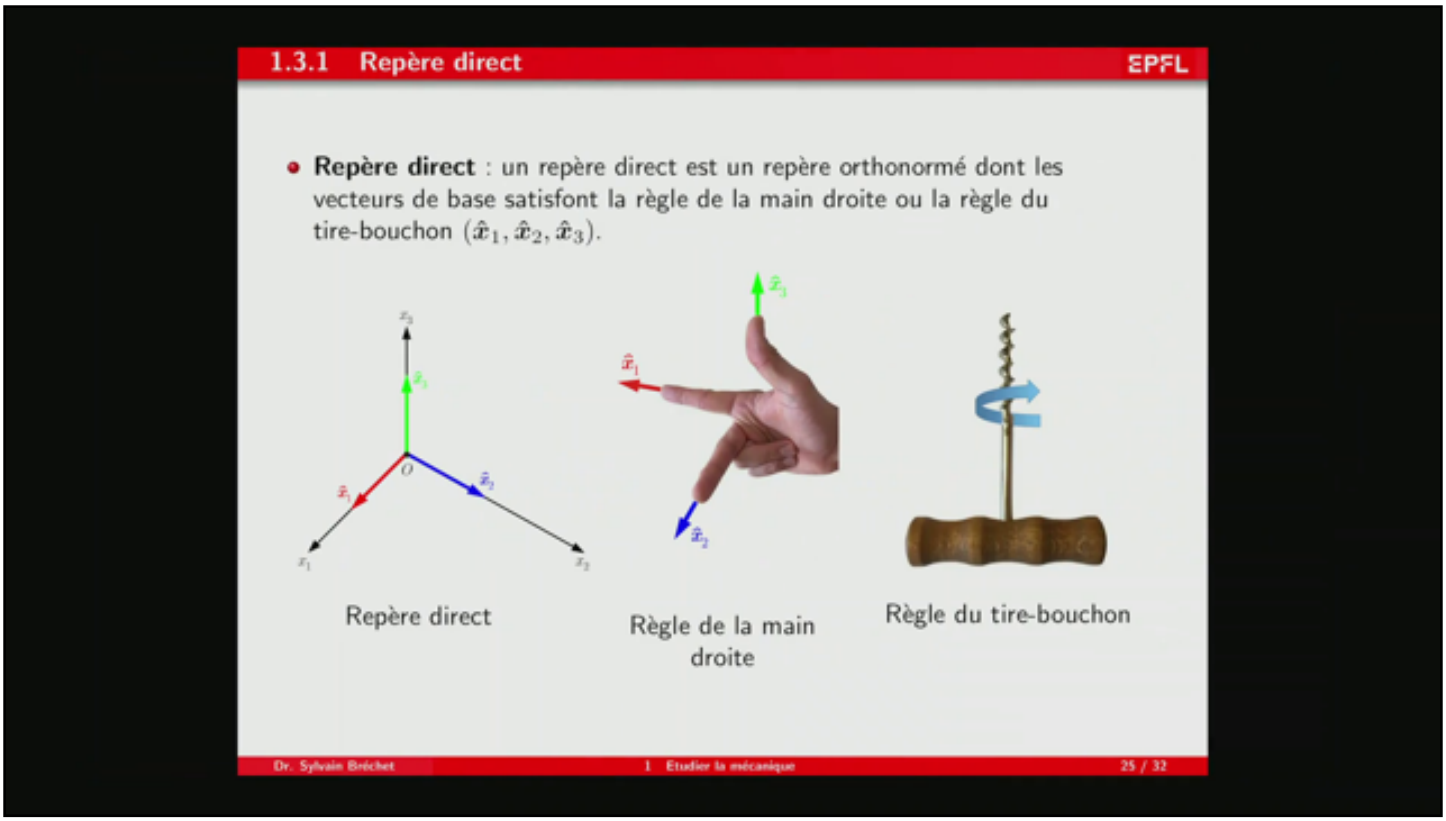
94m 46s



que les vecteurs soient orthogonaux. Et puis pour que ce soit plus symétrique, il ne faut pas qu'ils engendrent un parallélipéd, mais plutôt un parallélipéd bien particulier qu'on appelle un cube. Et bon, il faut qu'ils aient la même longueur. Et puis on va faire des calculs. Alors comment vous faire des calculs ? On va prendre un étalon, on va prendre une longueur de base qui correspond à un. Donc on prend des vecteurs de norme unité, de longueur unité, des vecteurs unitaires qui se croisent à ongle-droits. Prenez vos doigts. Vous alignez le majeur selon le premier vecteur unitaire, le index, pardon, selon le premier vecteur unitaire, le majeur selon le deuxième vecteur unitaire, ils se croisent à ongle-droits. On suppose qu'ils ont la même longueur pour simplifier. Puis maintenant vous dégenez avec le pouce. Vous avez créé un repère. Un repère dit ortho normal avec des vecteurs orthogonaux de longueur unité. Alors pour vous rappeler, c'est très facile. Ce qu'on aime bien faire en général, c'est pointer du doigt. Ensuite, il y a un doigt qui porte un nom lié à l'honneur, qui est le deuxième. Et puis vous dégenez la gâchette avec le pouce. C'est dans ce sens-là qu'il faut les prendre. Faites le même exercice avec la main gauche maintenant. Hop, pointer du doigt. Vous avez le majeur qui représente l'honneur, qui orientait dans une autre direction. Et puis vous tirez avec la gâchette. Bon, alors maintenant vous placez votre main droite, les deux vecteurs dans un plan horizontal et vous arrangez pour orienter les doigts de la main gauche dans la même direction, dans le même sens. Vous les superposez. Regardez bien. Et donc, voyez que quand vous avez placé les deux premiers, l'index est le majeur, il y a deux orientations possibles pour le pouce. Soit il est orienté vers l'eau, soit il est orienté vers le bas, 50, 50. Main gauche, main

notes

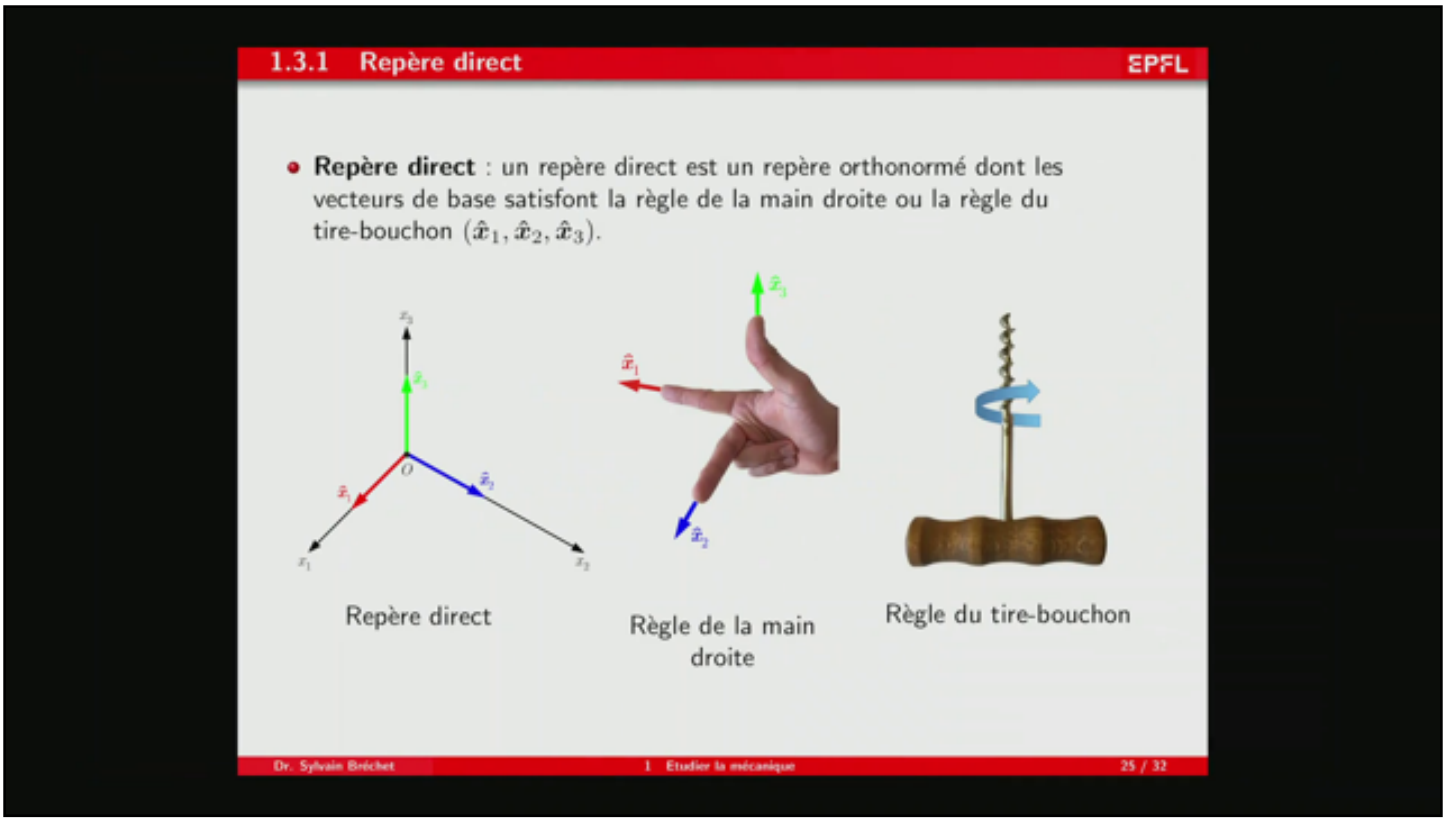
résumé



droite, si vous placez côte à côte, l'un est une image miroir de l'autre. D'accord ? Donc il n'y a que deux possibilités, il n'y a que deux repères directs possibles. D'accord ? Le premier, si on prend la main gauche, qui a une symétrie, une chiralité, une orientation qui essaie de la main gauche, la chiralité dit l'èvrogir et pour la main droite, c'est la chiralité dit d'extrogir. Alors, l'histoire retire toujours les droitiés. 99,9, voire une valeur plus élevée en poursant d'étudiants, vont suivre des cours pour lesquels on utilise la règle de la main droite. Ce cours n'y fera pas exception. Alors les gauchers dans la salle vont peut-être se dire mais c'est pas juste, c'est de la discrimination. Alors rassurez-vous, Newton était gauché de un et de deux. Si les maths et la physique ont retenu la main droite, la nature a retenu la main gauche. Pourquoi ? Parce que si vous prenez les acides aminés que vous retrouvez dans le vivant, ils ont tous une chiralité qui est celle de la main gauche. Vous voyez la nature fait bien les choses. Alors peut-être que cette règle dite de la main droite, d'accord, qui permet de définir un repère direct par rapport au repère d'il indirect. Peut-être que cette règle n'est pas celle qui vous convient le plus. Il y en a peut-être une autre qui vous conviendra mieux. S spécialement si vous venez d'une région viticole, disons du Chablé, vos doigts ou valaisans ne soyons pas racistes, d'accord, ou encore du Beaujolais, des Côtes du Rhône ou du Bordeaux-les, c'est la règle dite du Thierbouchon. Avant d'en parler, j'aimerais encore mentionner que quand on définit un repère, il faut spécifier les vecteurs qui le définissent dans l'ordre. Vous avez le premier ici, le deuxième, le troisième. Ça c'est pour le repère indirect. Nous on voudra le repère direct. Donc vous avez le premier vecteur, X1,

notes

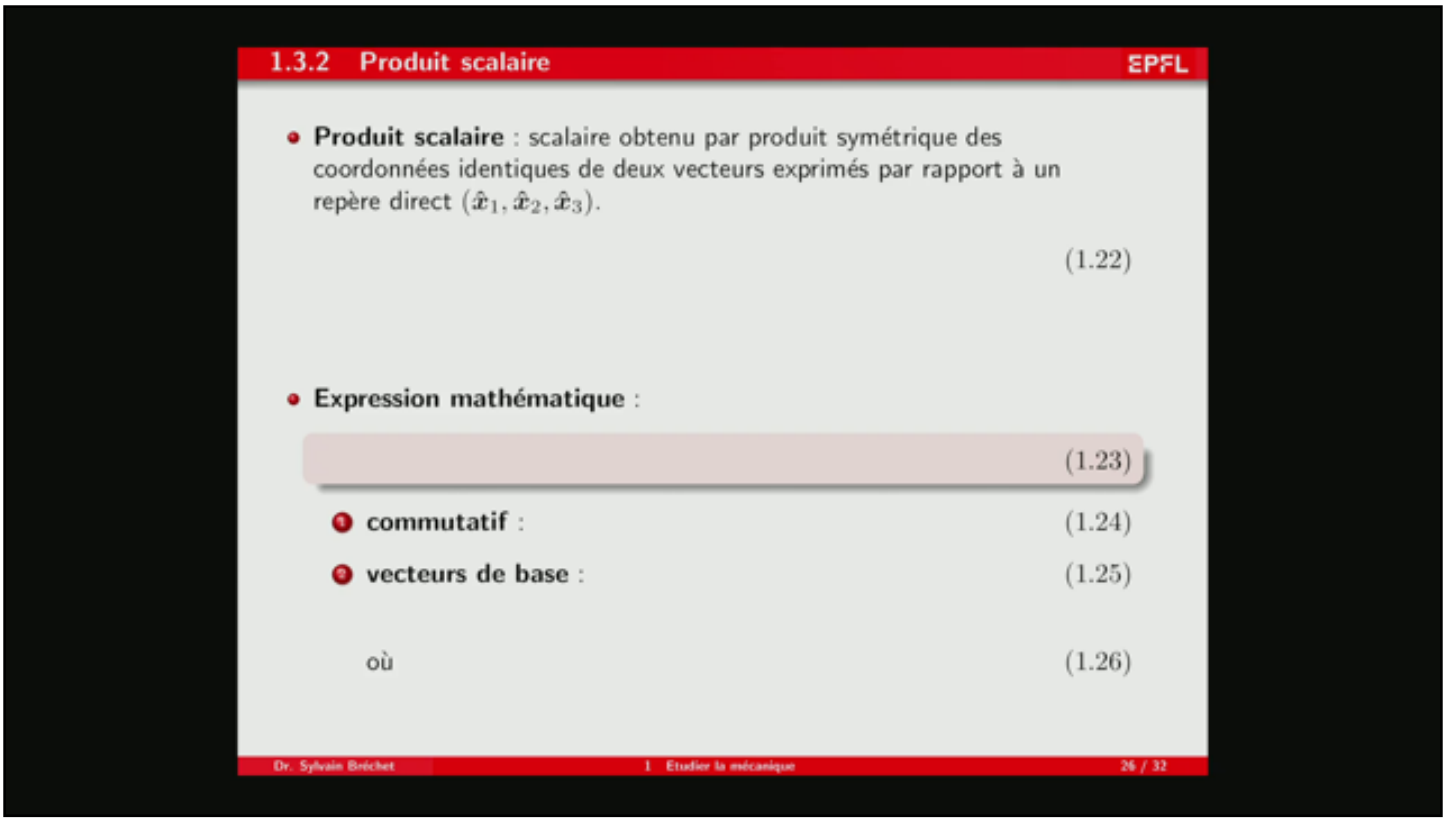
résumé



c'est un vecteur unitaire et pour représenter un vecteur unitaire, on va choisir d'avoir un petit chapeau qu'on va placer sur le vecteur, d'accord ? Donc X1 chapeau est le premier vecteur unitaire, X2 chapeau le deuxième et X3 chapeau le troisième. Les vecteurs seront toujours en caractère d'imprimerie, en latech, représentés en gras. À la main, c'est difficile de le faire, donc en général on mettra une flèche pour éviter que la notation soit excessive. Quand c'est un vecteur unitaire, on met un chapeau, ce qui signifie automatiquement que le vecteur est unitaire, que c'est déjà un vecteur, d'accord ? Donc je vous disais, il faut retenir qu'un seul type de repère, le repère direct. Donc quand vous faites l'examen, vous placez la main gauche derrière votre dos et vous manipulez la main droite, d'accord ? Vous pointez du doigt, le doigt d'honneur et ensuite la gâchette, vous aurez compris. C'est un truc

notes

résumé

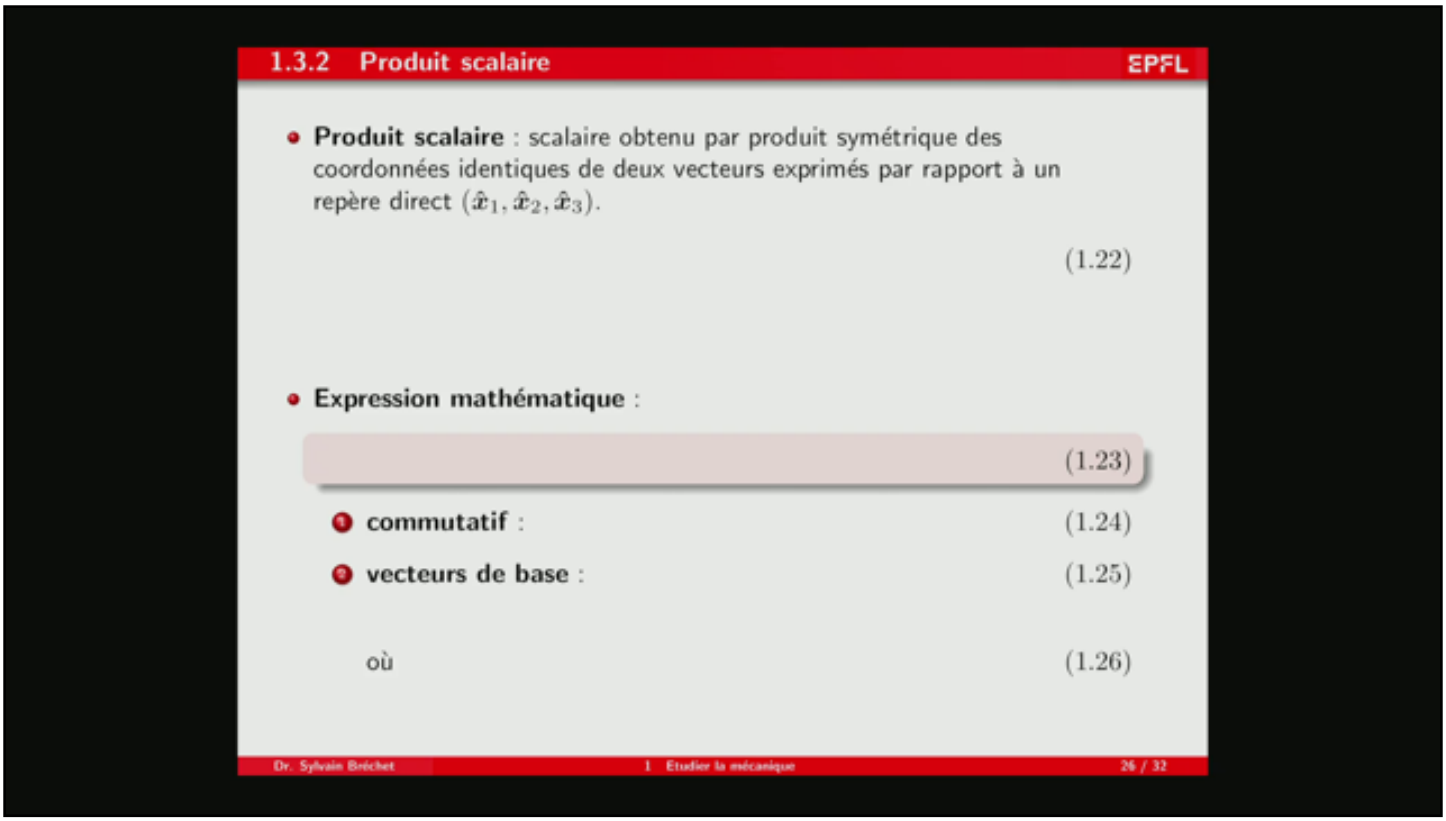


mémotechnique qui permet de retenir l'ordre dans lequel il faut procéder. Bien. Passons maintenant à la règle du tir bouchon. Si vous prenez donc votre main droite pour définir le repère, l'index d'abord pour le premier vecteur, x1 chapeau, le majeur pour x2 chapeau qui est en bleu et finalement la gâchette pour x3 chapeau, donnée en vert. Alors si vous regardez votre main droite, ce que vous pouvez aussi faire, c'est prendre tous les doigts de la main droite et les faire pivoter de x1 chapeau vers x2 chapeau. Et alors automatiquement, x3 chapeau, le troisième vecteur, est donné par l'orientation du pouce. Et ça, c'est ce que vous faites lorsque vous débouchez une bouteille puisque vous imaginez qu'on a ici une bouteille, d'accord, qu'on va faire tourner le manche de la bouteille de x1 chapeau vers x2 chapeau comme on le ferait avec la main droite, d'accord. Et ce qui va se passer si on fait tourner, il faut que je fasse en l'autre sens, x1 chapeau vers x2 chapeau, et bien automatiquement, si on a une chiralité droitière, le pas de vis va s'enfoncer dans la bouteille. D'accord ? Donc, la clé du processus, c'est le kébouchon, d'accord ? Voilà. Alors, ceci étant dit, on va maintenant définir ensemble le produit scalaire. Alors, oui, je suis peut-être ou juste vous raconter une anecdote. Pendant quelques années, j'ai arrêté de le faire maintenant. J'avais présenté aux étudiants la règle du tirbouchon mathématique, et j'avais continué avec la règle du tirbouchon social. L'idée était la suivante, il y avait une maniepe, et je demandais à quelqu'un qui s'est levé le coup de me rejoindre à l'avant d'auditoire, je lui donnais un tirbouchon, et il allait le planter dans le liège d'une bouteille qui débouchait ensuite, ainsi que cinq autres bouteilles, et on prenait un petit appareil à la fin du cours. J'ai reçu des réclamations à ce sujet en

notes

résumé

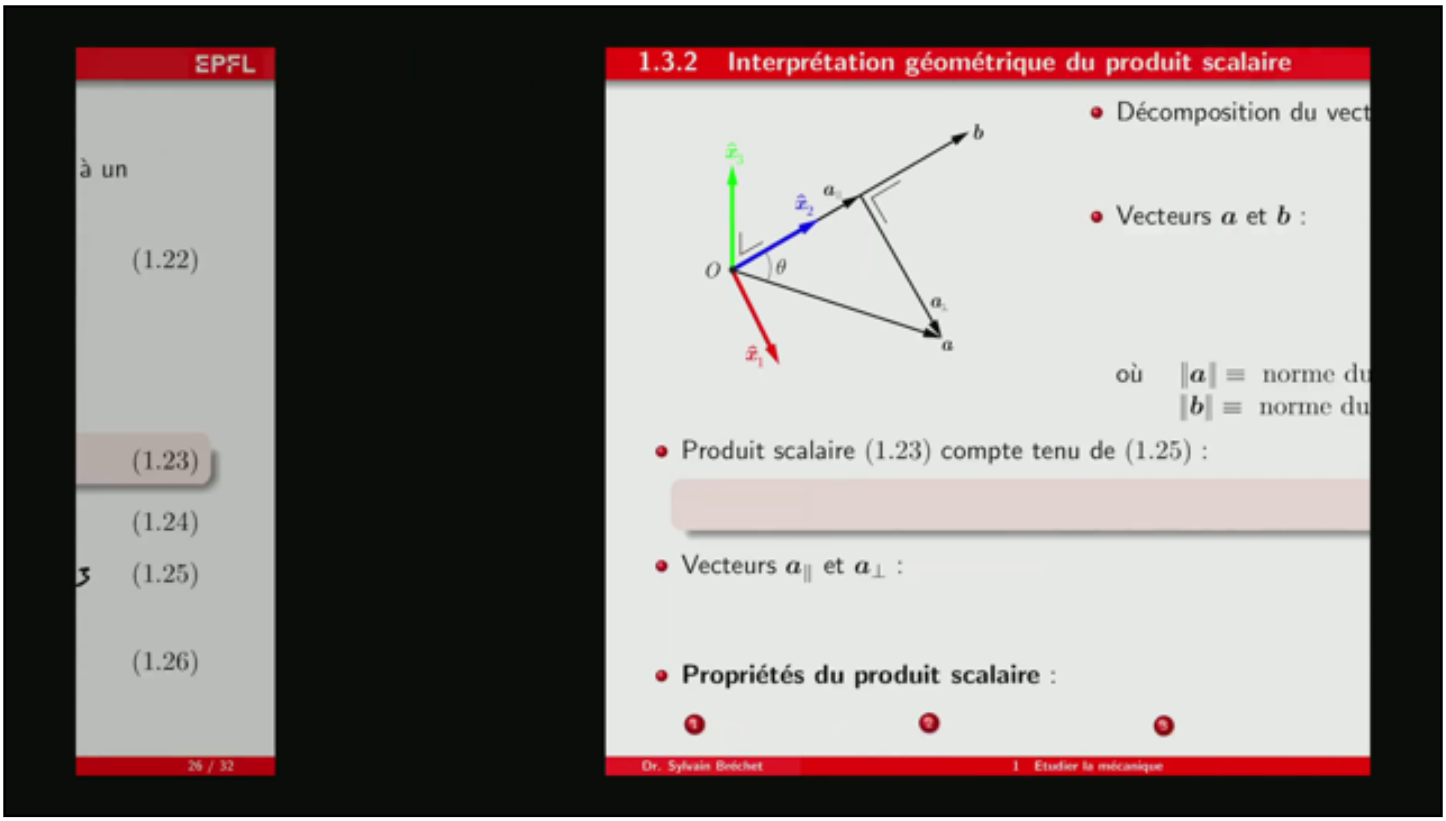
101m 13s



me disant que c'était absolument indécent de proposer de l'alcool encore aux étudiants durant les cours. Donc, évidemment, avec six bouteilles, pourquoi 250 étudiants ? L'état d'ébriété est assez difficile à atteindre. Donc, il n'y avait pas mordom. Bon, bref, j'ai arrêté de le faire, mais je vais quand même vous raconter ce qui m'avait été dit une fois dans une évaluation de cours suite à la règle du tirbouchon mathématique et du tirbouchon social. Il y a un étudiant qui avait beaucoup d'humour qui m'a dit,

notes

résumé

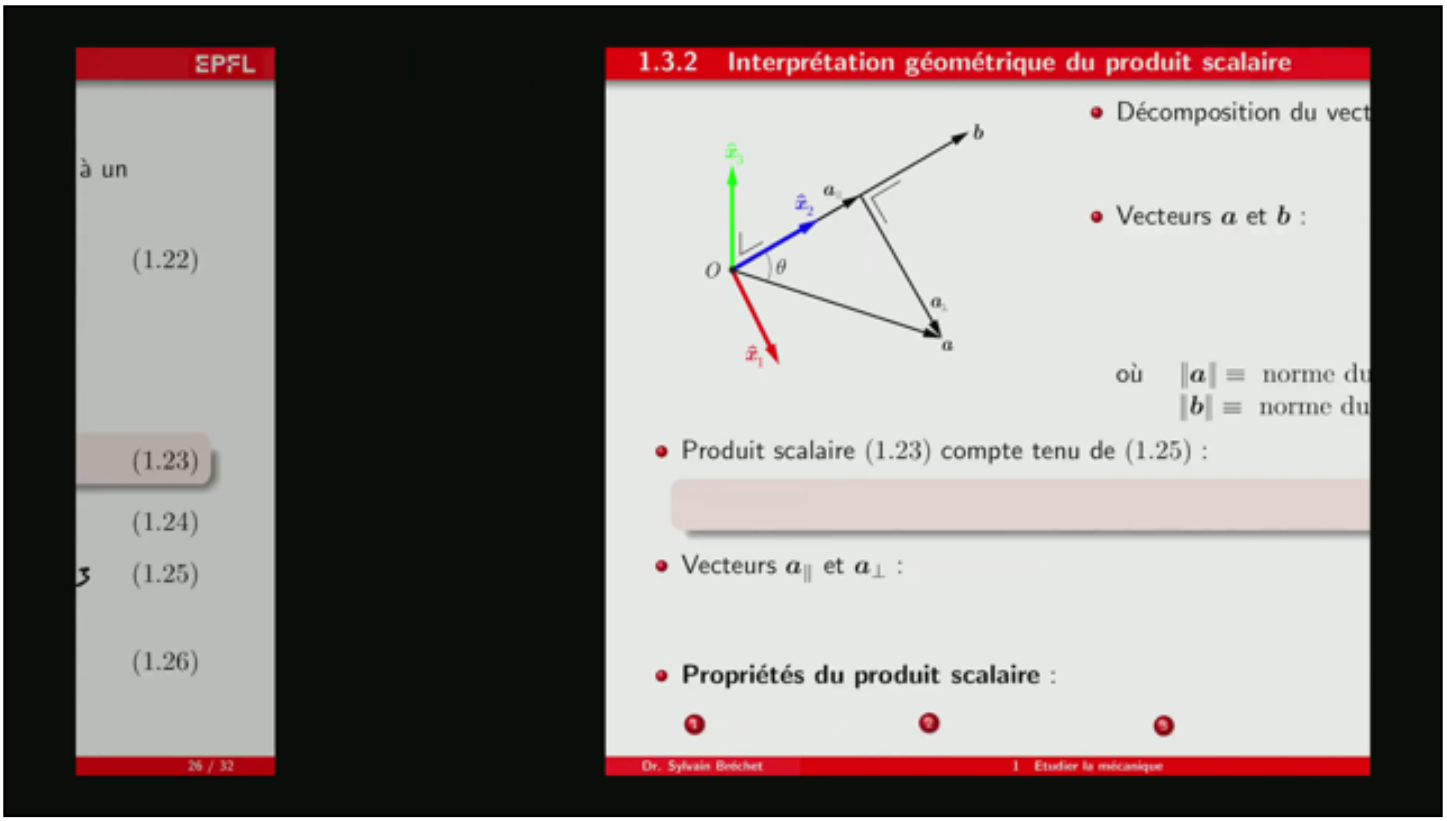


voilà, je n'ai pas bien compris la règle du tirbouchon social, il faut que vous me réexpliquiez. Ce que j'ai fait avec plaisir, bien sûr. Voilà. Donc, ceci étant dit, définissons maintenant le produit scalaire de deux vecteurs et on va faire ceci dans un repère, dans un repère direct. Donc, le repère direct est défini dans l'ordre par les trois vecteurs unitaires X1 chapeau, X2 chapeau et X3 chapeau. On va prendre deux vecteurs qui ne sont pas des vecteurs unitaires qu'on va noter avec des flèches A et B. Tout vecteur, toute flèche dans l'espace à trois dimensions peut être écrite comme combinaison linéaire des vecteurs unitaires. Donc, on prend les trois vecteurs unitaires et on les multiplie par des grandeurs scalaires qui sont les composantes des deux vecteurs dans la base donnée par le repère direct. Donc, on aura à une fois le vecteur X1 chapeau plus à deux fois le vecteur X2 chapeau plus à trois fois le vecteur X3 chapeau. On aura de la même manière B1 fois le vecteur X1 chapeau plus B2 fois le vecteur X2 chapeau plus B3 fois le vecteur X3 chapeau. Je rappelle que les composantes A1, A2 et A3 ainsi que B1, B2 et B3 sont des nombres. C'est des scalaires. Alors que les grandeurs ici avec des chapeaux sont des vecteurs unitaires. Alors, comment est-ce qu'on définit produit scalaires ? Le produit scalaire est défini comme un nombre et comme c'est un nombre et que les nombres commutent, il est défini de manière symétrique. On parle en anglais de dot product, le produit point. C'est A point B. Il est défini de manière symétrique. Qu'est ce qu'on va faire ? On va multiplier les composantes des deux vecteurs par paire, d'accord ? Avec les indices 1, 2 et 3. On aura donc A1 fois B1 plus A2 fois B2 plus A3 fois B3. Ce produit est commutatif. Ce

notes

résumé

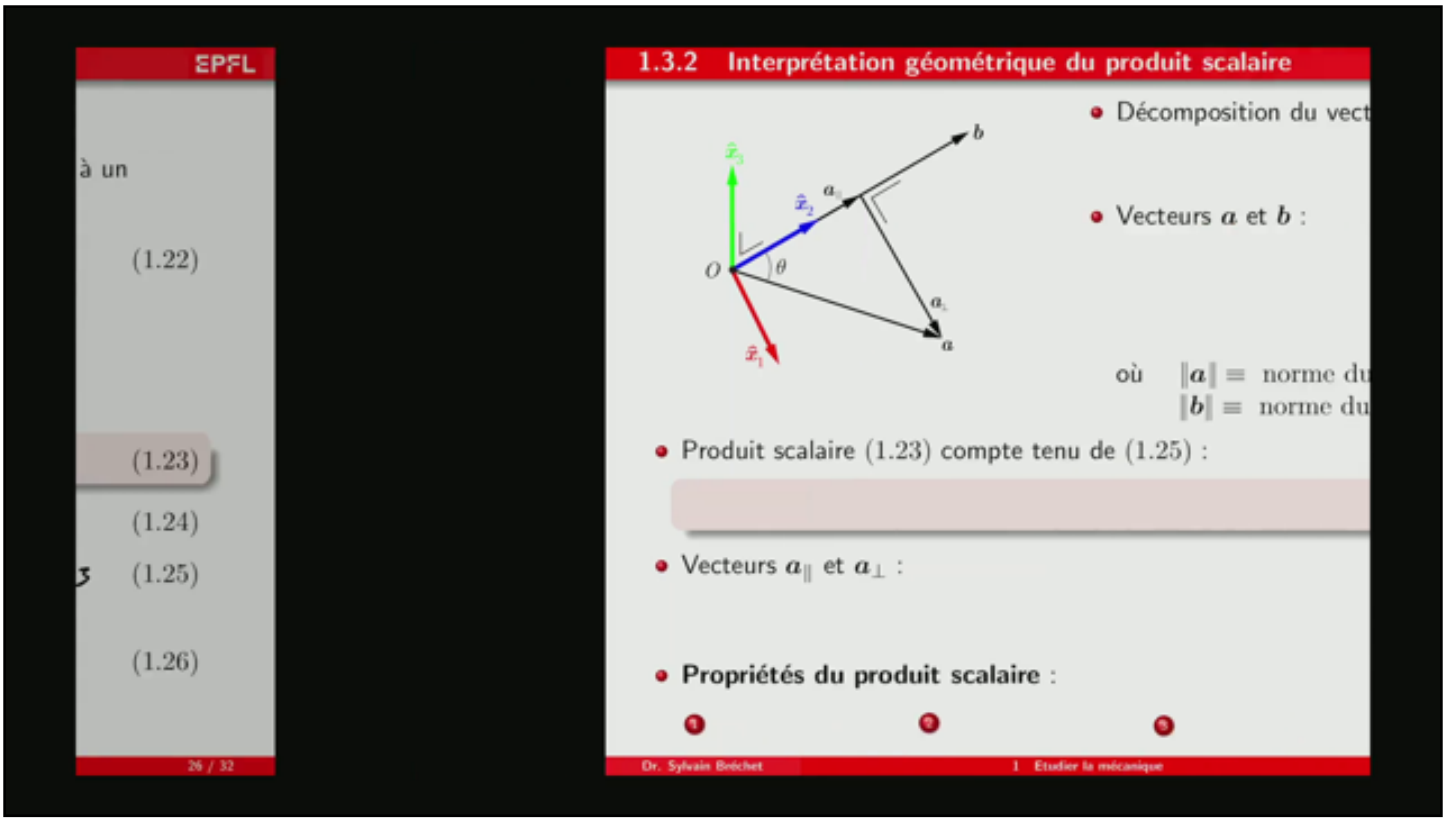
103m 37s



qui veut dire que si on décide de changer l'ordre des vecteurs dans le produit, on ne change pas le résultat. Pourquoi ? Parce qu'on a des nombres. Ils ont A1 qui vaut 2, B1 qui vaut 3. Il est clair pour tout le monde que 2 fois 3 est égal à 3 fois 2. C'est encore heureux. D'accord ? Sinon, ça serait beaucoup plus compliqué demander à l'inconne comment gérer de telle structure. Donc, le produit scalaire de A avec B est commutatif. Il est donc égal au produit scalaire de B avec A, ce qui ne sera pas le cas du produit vectoriel. Bon. Alors, compte tenu de la décomposition dans la base, dans le repère direct. Si on fait le produit des vecteurs A et B écrits comme combinaison linéaire des vecteurs unitaires, on a besoin d'une règle qui nous donne le produit scalaire des vecteurs unitaires. Qu'est-ce qu'on voit ? Si on multiplie les deux premiers, ça nous donne simplement les préfacteurs A1 et B1. Dans les deux premiers, on a le même vecteur unitaire. C'est pareil pour les deux suivants. C'est pareil pour les deux derniers. Et donc, si on multiplie des vecteurs identiques, on doit trouver un. En revanche, si on a des composants différents, il y a encore d'autres exemples, ça doit donner zéro. Et donc, la règle est la suivante. Le produit scalaire d'un vecteur unitaire, disons le vecteur X, avec un vecteur unitaire qui est le vecteur X, J va être égal à ce qu'on appelle le symbole de chronécaire delta Hj ou pour tous les I et J qui peuvent prendre des valeurs entières de 1 à 3, le symbole de chronécaire delta Hj est défini de la manière suivante. Il vaut 1 dans le cas où les indices sont égaux, il vaut 0 sinon lorsqu'ils sont différents. Voilà, ça c'est la règle de cuisine. Bon, alors maintenant, ce qu'on

notes

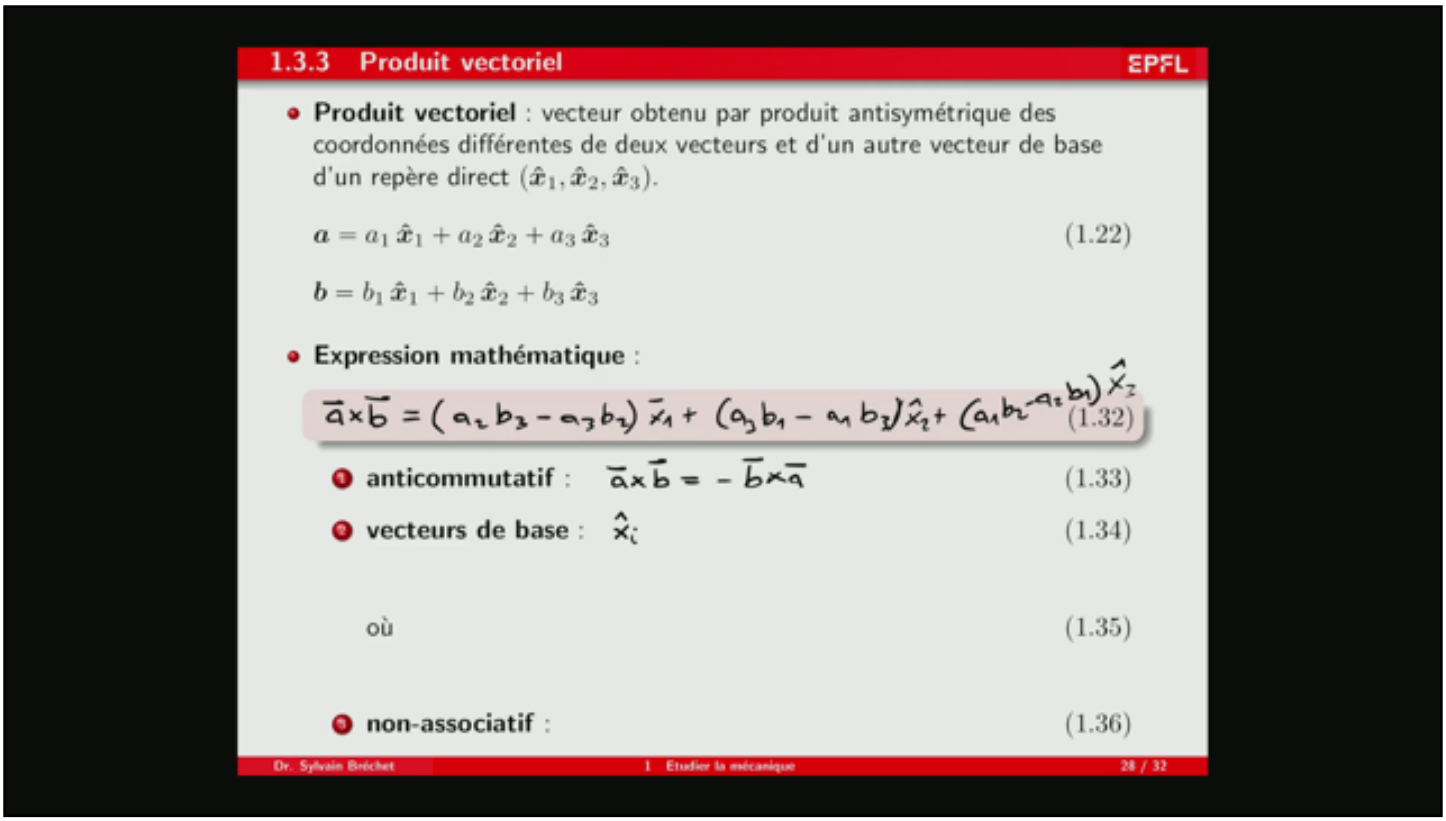
résumé



va montrer, c'est qu'il y a une interprétation géométrique très

notes

résumé

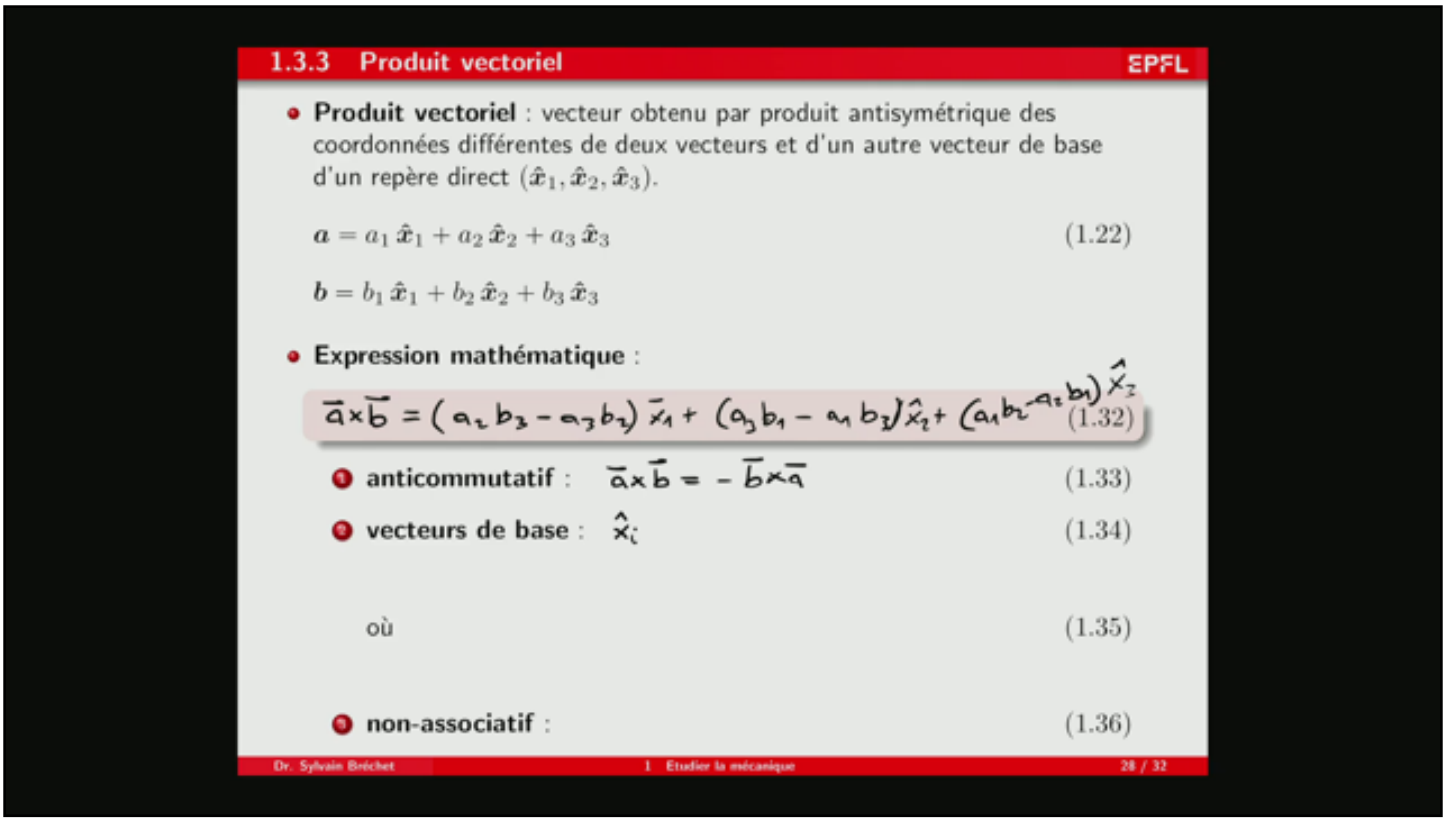


belle qui se cache derrière le produit scalaire. Alors, pour le voir, il va falloir qu'on prenne nos vecteurs A et B et qu'on les dispose dans un plan, on peut toujours les placer dans un plan, d'accord, issu du même point. Ce point, on va le prendre comme origine du repère direct qu'on s'est choisi, c'est un repère direct, comment est-ce qu'on peut le voir ? Eh bien, vous prenez l'index de la main droite, vous l'alliez selon X1 chapeau, le majeur selon X2 chapeau, vous voyez que le pouce sort du plan, il est orienté vers l'eau, d'accord ? Bon, alors maintenant, on a le vecteur A qui est ici, le vecteur B qui est là, on a un anctéta en traçés de vecteurs, d'accord ? Alors pour y voir un peu plus clair, pour comprendre la géométrie cachée là derrière, on va vectoriellement écrire le vecteur A sous sa forme composée d'un vecteur A parallèle à B et d'un vecteur A perpendiculaire à B, comment est-ce qu'on les trouve ? Eh bien, on prend ce vecteur, c'est droite orienté, qu'on va projeter selon B avec une projection orthogonal, on trouve un premier vecteur qui est à parallèle, évidemment, que si on le projette selon la droite orthogonal à B, d'accord, on trouve A perpendiculaire, la somme des deux, la somme vectorielle, on les place bout à bout, c'est ça une somme vectorielle, vous avez le premier vecteur ici, vous ajoutez le deuxième là, et bien ça va vous donner un, c'est commutatif, donc vous pouvez commencer par celui-ci et ajouter ensuite l'autre là, vous allez trouver le même résultat, ou plutôt vous allez le faire comme ça, ça revient en même, vous avez le vecteur qui est là, qui est le même puisque même si l'origine est différente, l'orientation reste la même. Maintenant, ces vecteurs, on va les écrire en termes des normes qu'ils ont et de

notes

résumé

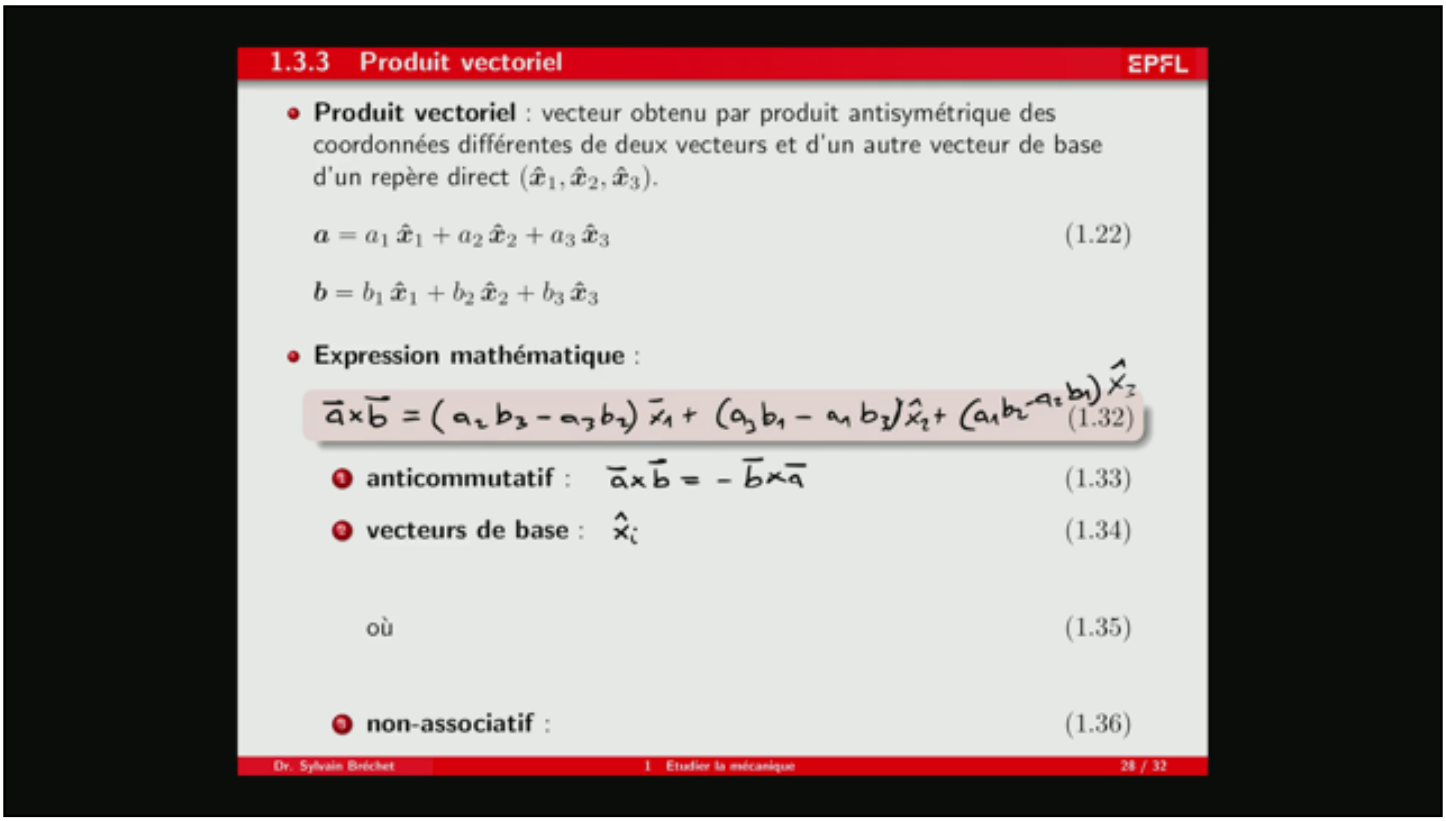
107m 50s



leur orientation à l'aide de l'angle theta. Donc on va les écrire comme combinaison linéaire des vecteurs unitaires de notre repère direct. Commençons par le vecteur A. Alors si on prend le vecteur A, on va commencer par disons A perpendiculaire, qui est ici, d'accord, si on prend le vecteur A, qu'on prend sa norme, sa longueur, on va noter cette norme de la manière suivante, on met deux traits parallèles verticaux à gauche et à droite, ça c'est la norme du vecteur, d'accord, la longueur. Et puis on va le projeter, donc ici on a un tri en grecque angle avec un angle theta, on va le projeter sur le cathète opposé qui dit la projection sur le cathète auto-opposé dit le sinus de l'angle theta, d'accord ? Quelle est l'orientation de ce vecteur A perpendiculaire ? Il est parallèle au vecteur unitaire x1 chapeau, c'est donc la norme de A fois le sinus de theta fois x1 chapeau. On fait la même chose maintenant pour le projeter parallèlement à B, d'accord ? On aura la norme du vecteur A, on va projeter sur le cathète qui est adjacent à l'angle theta, ce qui va bien sûr faire intervenir le cosine de l'angle theta fois le vecteur unitaire correspondant qui est x2 chapeau, d'accord ? Pour le vecteur B, c'est beaucoup plus simple, il est colliné à x2 chapeau, c'est tout simplement sa norme, sa longueur, B fois x2 chapeau, d'accord ? Bon, alors maintenant on applique la recette de cuisine. Le produit scalaire du vecteur A avec le vecteur B, c'est le produit des composantes identiques de ces deux vecteurs. Alors le plus simple c'est B. B, il a une seule composante qui est selon x2 chapeau, il n'y a que B2 qui est non nul. Donc dans l'ensemble des termes, A1, A2, B2, A3, B3, le seul terme en B n'ont nul, c'est le deuxième, donc il

notes

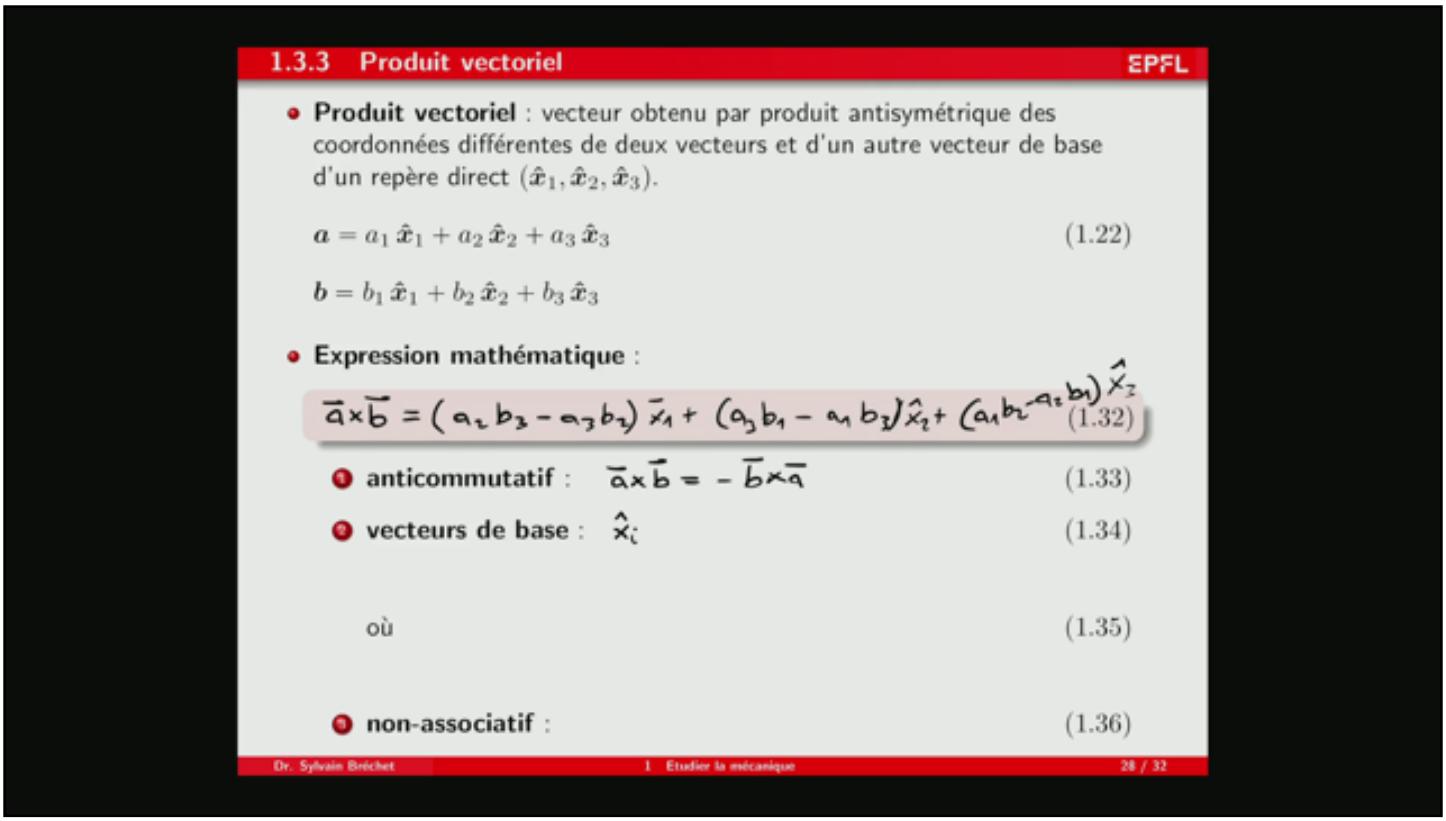
résumé



va falloir multiplier la deuxième composante de A par la deuxième composante de B soit A, la norme de A fois le cosine de theta, fois la norme de B, en d'autre termes, c'est la norme de A, fois la norme de B, fois le cosine de l'angle entre les vecteurs. Alors ça c'est un résultat très intéressant. Pourquoi ? Il est où le repère ? Il a disparu. Pourquoi est-ce qu'il a disparu ? Parce qu'on a un produit qui est intrinsèque au vecteur A et B. Comment est-ce qu'on définit ce produit scalaire à l'aide des longueurs des vecteurs A et B et de l'angle entre les vecteurs ? Ça ne dépend pas du choix du repère qu'on a pris. C'est pour ça qu'il est défini de cette manière. En plus, ce produit scalaire dénote le parallélisme et c'est ce qu'on va voir tout de suite en écrivant les vecteurs A parallèles, qui est la norme de A fois le cosine de theta, fois x de chapeau, et A perpendiculaire, qui est la norme de A fois le sine de theta, fois x à un chapeau. Commençons à titre exemple, commençons par prendre le produit scalaire du vecteur A avec lui-même. On prend la définition qui est ici, on remplace B par A. On va se retrouver avec la norme de A, fois la norme de B qui est la norme de A, fois le cosine de l'angle entre A et lui-même, et le cosine de l'angle entre A et lui-même, c'est le cosine de l'angle zéro. Excusez-moi. Dans 1.9, on n'a pas mis d'orientation avec la norme de A multipliée par la norme de B multipliée par cos theta. Alors, je vois ou voulez en venir, c'est une bonne question, ce qu'on a, c'est une orientation relative du vecteur B par rapport au vecteur A. En revanche, il n'y a aucune référence par rapport au repère. Dans

notes

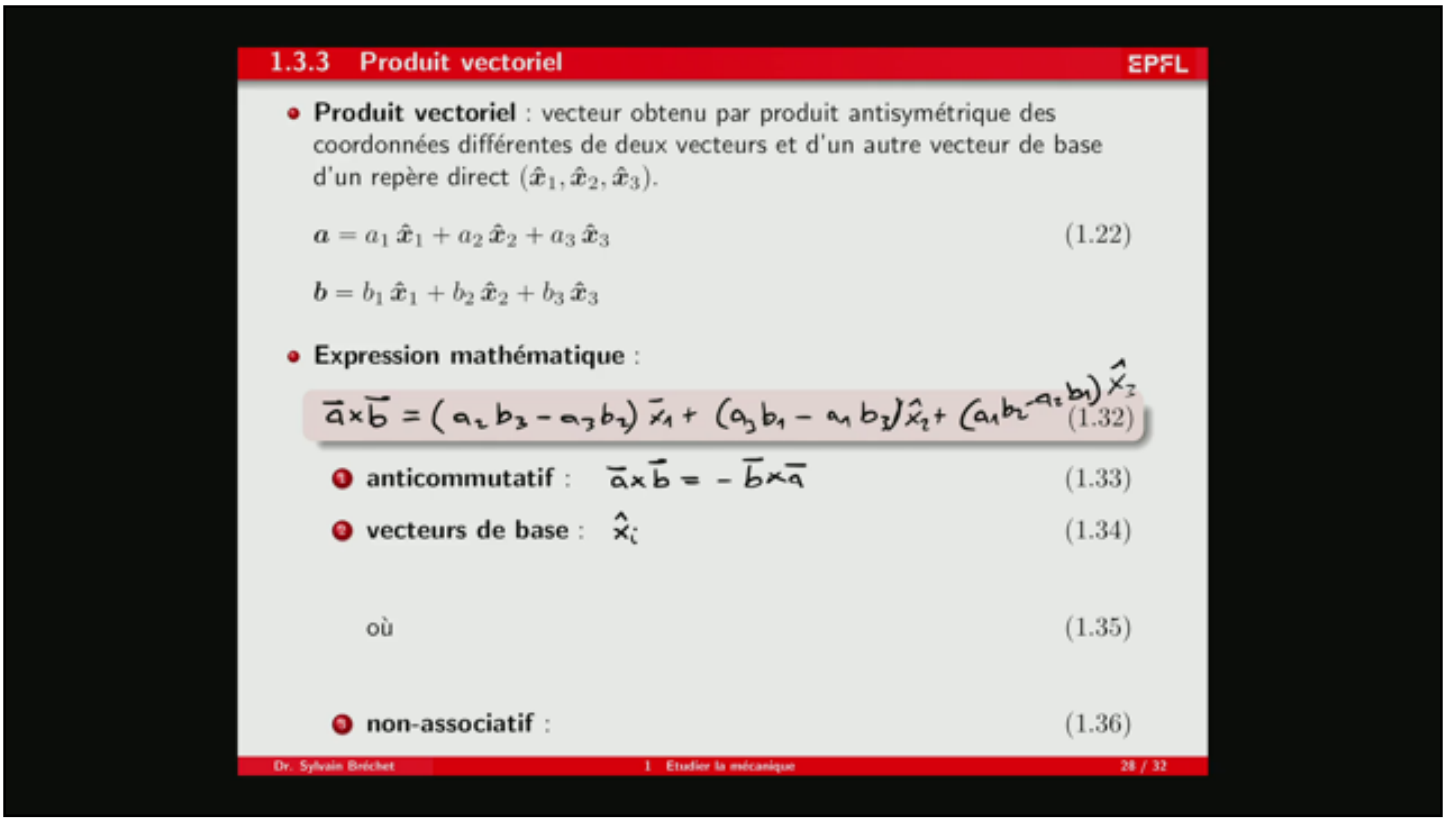
résumé



notre terme, vous pouvez prendre votre paire, puis maintenant, vous le faites tourner dans l'espace, sur une sphère, autour du point O. Vous donnez l'orientation que vous voulez, le résultat sera le même. Alors, ce qui va changer évidemment, c'est l'écriture explicitie cite des vecteurs dans la base, mais le résultat sera toujours le même. Ça ne va pas dépendre du repère choisi. Mais ça va dépendre, vous avez raison, de l'orientation respective de A avec B. Ça, c'est clair. Donc, le produit du scalère du vecteur A avec lui-même, c'est le carré de la norme de ce vecteur. Alors, maintenant, ce qu'on peut faire, c'est prendre un produit scalaire de A parallèle avec B, par exemple. Qu'est-ce qu'on constate ? A parallèle et orienté selon X2 chapeaux, B est aussi. Donc, lorsqu'on les multiplie, on trouve le même résultat que si on avait bêtement pris le produit scalaire de A avec B. Maintenant, si on prend le produit scalaire de A perpendiculaire avec B, qu'est-ce que ça va donner ? Zéro, exactement. Pourquoi ? Parce qu'en fait, A perpendiculaire est orienté selon X2 chapeaux, B selon X2 chapeaux, X1 chapeau, X2 chapeau, le produit scalaire est nul. Si les vecteurs sont orthogonaux, produit scalaire est nul. Si les vecteurs sont parallèles, A, on trouve, si ils sont orientés dans le même sens, on trouve la valeur maximale du produit scalaire, et elle va être minimale si ils sont orientés à 180°. Donc, le produit scalaire est une mesure du parallélisme entre les vecteurs. Donc, il y a une partie de l'information qui manque, qui est liée à l'orthogonalité entre les vecteurs. Cette partie, on va la traiter dans le cadre du produit vectoriel. Louis, vous avez une question ? Par exemple, si le corps donnait dans une autre... Il y en a un avec le vecteur, par exemple, les croix ? Oui. Il y a une chose qui a

notes

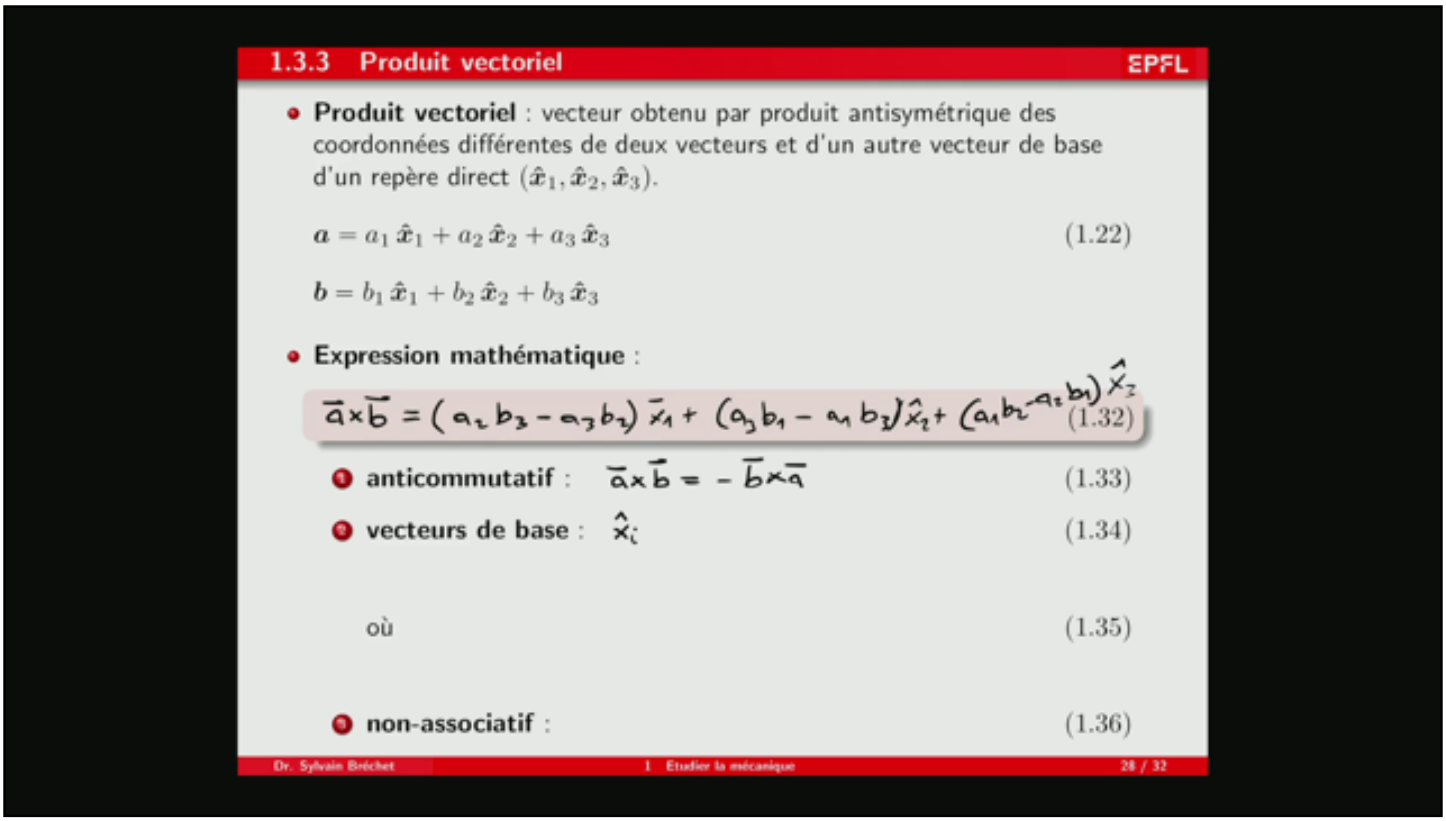
résumé



l'air très bien, c'est qu'il ne faut pas se changer ça. Alors, vous avez parfaitement raison. Si vous prenez un vecteur A et un vecteur B, quelconque, en d'autres termes, ça reviendrait à changer l'orientation du repère. Vous avez trois composants non nuls pour les deux vecteurs. Quelconque. Quand vous faites le produit scalaire, vous allez tomber sur le même résultat, puisque le résultat va dépendre uniquement de la norme de A, de la norme de B et du cosysus de theta. Ce qui va changer, c'est la paramétrisation. Ce qui va changer concrètement, c'est l'écriture explicite des vecteurs A et B dans la base, puisque vous aurez alors, au sens de l'algebra, un changement de base. D'accord ? Voilà, donc passons maintenant au produit vectoriel, le plus intéressant des deux. D'accord ? Le produit vectoriel, lui, va s'écrire avec une croix. Il va nous retourner un vecteur. Donc le produit vectoriel de A avec B, c'est A croix B. Alors, dans la plupart des livres de mécanique francophone, oui ? on va prendre un multi positif de A par exemple. Et maintenant si ce multiple est négatif, là c'est... Si vous voulez, les vecteurs sont orientés à 180°. Ce moment-là, le résultat sera minimal, mais il sera non nul. Le fait que ce soit non nul, reflète le paralysme. Alors maintenant, si le produit scalaire se fait avec des vecteurs qui ont des orientations différentes, ce qui va compter au final dans le produit, c'est la projection d'un vecteur sur l'autre, et c'est en ce sens que le produit scalaire tient compte de l'information liée au paralysme. D'accord ? Donc il y a une partie d'information qui manque qui va se cacher dans le produit vectoriel. Ce produit vectoriel, j'insiste sur le fait que l'écriture correcte, c'est avec une croix. Parce que l'écriture avec un wedge, c'est autre chose. C'est le produit extérieur d'une algèbre, qui est ce qu'on

notes

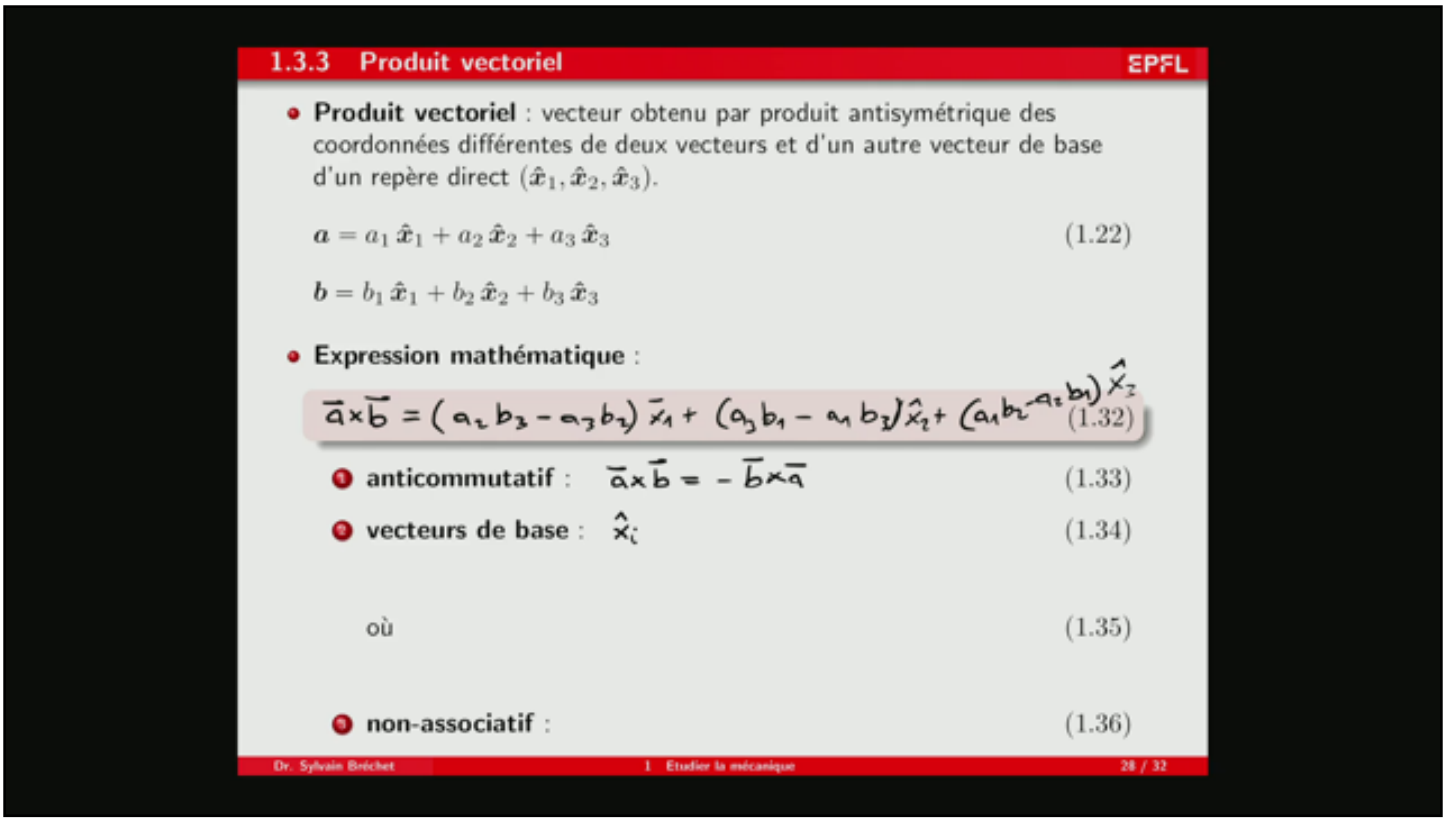
résumé



devrait faire ensemble, mais qu'on ne va pas faire parce qu'on m'a chargé de vous enseigner la mécanique classique dans la structure d'un espace vectoriel, et donc on a besoin du produit vectoriel, qui est intéressant, même s'il a certaines propriétés qui le rendent un peu pathologiques. Bien. S'il y a une symétrie cachée derrière le produit scalaire, il y a une antisymmétrie cachée derrière le produit vectoriel, oui ? Pourquoi, moi j'ai vu, dans mes contes physiques, j'avais eu des coups de foin de chapeau, justement le wedge, justement, pourquoi ça peut arriver qu'il y ait un régal, en souvent, il prend du fait que c'était égal, d'une à l'autre ? L'un est le dual de l'autre. C'est-à-dire que le produit extérieur d'une algèbre définit un bivecteur qui est un élément de plan orienté, alors que le produit vectoriel va définir un vector qui a la propriété, je vais vous le montrer dans quelques instants, que sa longueur n'est pas une longueur mais représente une air, à cause de la dualité, d'accord ? Alors, comme il y a cette dualité, la plupart des physiciens, l'enjambes allègrement et considèrent que c'est pareil, ça ne l'est pas au sens mathématique, d'accord ? Voilà, donc je me permets de le mentionner, parce que c'est un point très très intéressant en fait. Bref, c'est lié à la structure des quaternions qui permettent de traiter les rotations de manière intrinsèque sans faire appel à des matrismes, on pourrait en parler plus tard, ou après le cours si ça vous intéresse. Donc, on a une antissimétrie cachée derrière le produit vectoriel des vectors A et B, qui va se manifester en termes des composantes. Dans le cas général, on va se retrouver avec 3 composantes, une première selon X5 chapeau, une deuxième selon X2 chapeau, et une troisième selon X3 chapeau, d'accord ? Alors, pour la première, on va faire intervenir des composantes de A

notes

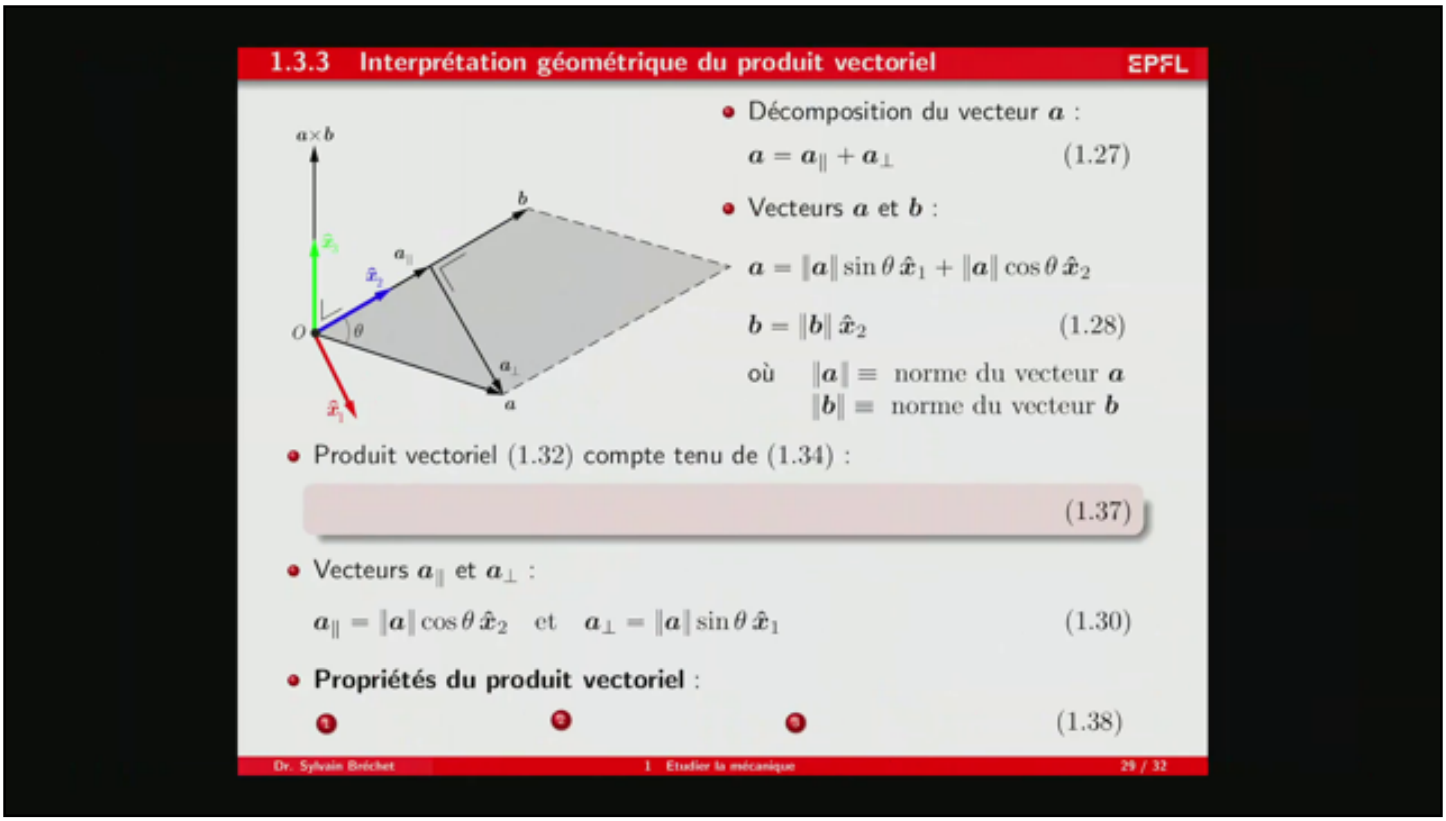
résumé



et B qui sont différentes d'un, soit 2 et 3. Et comme on veut qu'on ait cette antissimétrie, on va le définir comme A2 x B3, et il faudra retrancher A3 x B9. Ensuite, pour le deuxième terme, on va avoir des composantes de A et B qui sont différentes de 2, d'accord ? Alors, on va choisir, pour garder la structure liée à la main droite en réalité, on va choisir A3 x B1, et il faudra retrancher A1 x B3. On va terminer avec le troisième terme, qui va faire apparaître des composantes de A et B, différentes de 3, soit 1 et 2. On va prendre A1 x B2, moins A2 x B1, d'accord ? Par construction, ce produit vectoriel est antissimétrique. C'est-à-dire que le produit vectoriel de A avec B est l'opposé du produit vectoriel de B avec A. Vous pouvez tout de suite le voir, puisque si vous changez A par B et B par A, vous voyez que vous obtenez l'opposé du signement qui se trouve ici dans chacun des termes, d'accord ? Ça a une signification assez profonde sur le plan géométrique qu'on va voir dans quelques instants. Alors maintenant, si vous prenez le vector A écrit en composant dans le repère le vector B aussi, et que vous effectuez ce produit, vous allez vous retrouver avec des produits vectoriels des vecteurs unitaires, qui doivent satisfaire une structure qui, pour le coup, est un petit peu plus compliquée que la précédente, même nettement plus compliquée que la précédente. Donc si on prend un vector, le vector xi,

notes

résumé

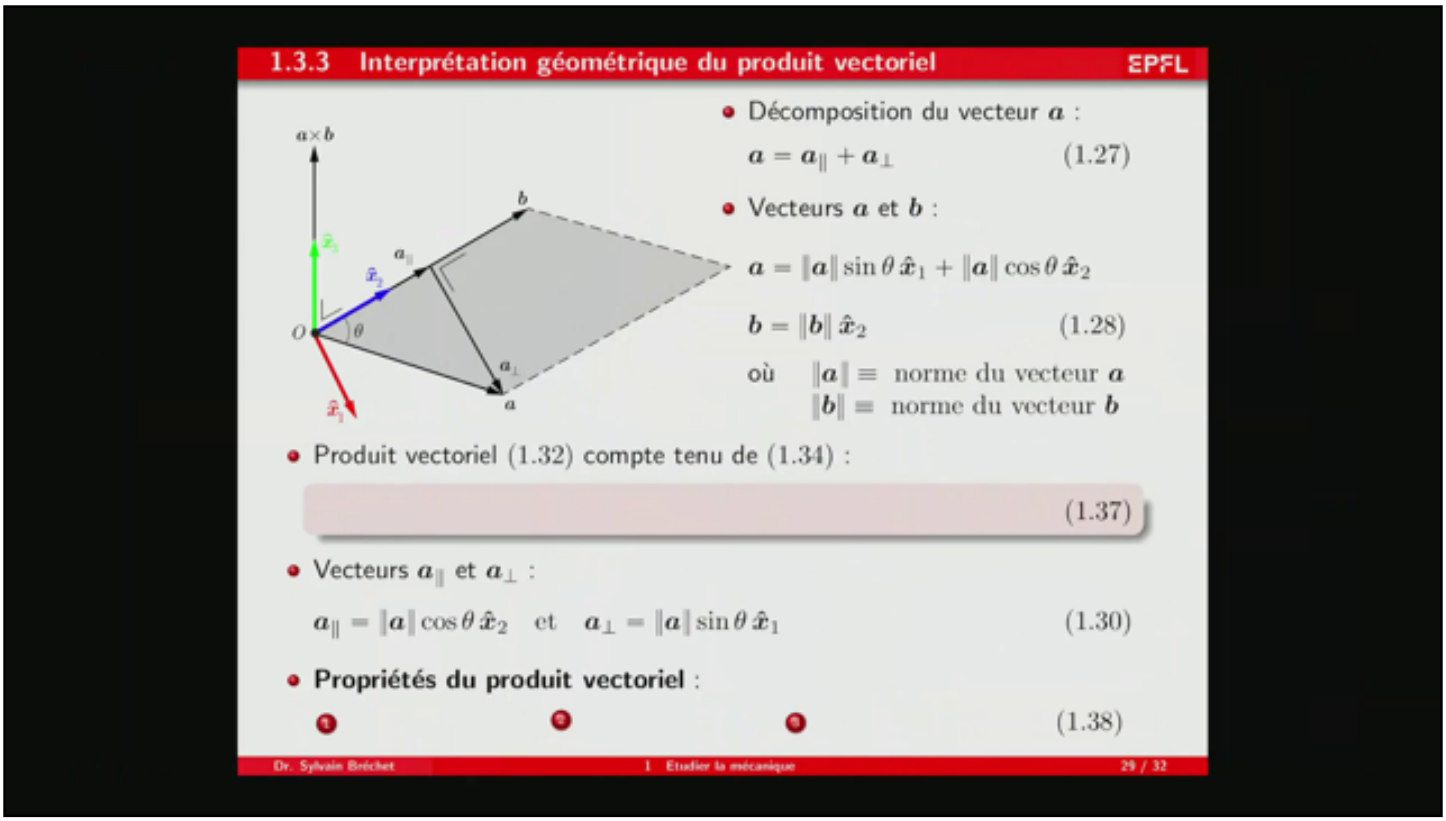


qu'on fait le produit vectoriel avec le vector xj, on va trouver un multiple du vector xk. Ce multiple fait apparaître un coefficient qu'on va appeler epsilon ijk, qui est en fait le coefficient du tenseur complètement antisymmétrique devant trois de l'evitcita peu importe. Je vous donne la termes techniques, même si ça viendra plus tard, d'accord ? Donc ici, les coefficients i, j et k peuvent prendre des valeurs 1, 2 et 3. Je vous parlais d'antisymmétrie parce que ces coefficients de l'evitcita epsidon ijk sont définies de la manière suivante. Il y a une coefficient de référence pour laquelle i, j et k vont 1, 2 et 3. D'accord ? Donc, epsilon vaut 1, xi, epsilon et epsilon 1, 2, 3. Derrière se cache le groupe des permutations. Chaque permutation, comme si antisymmétrique, va changer le signe. Donc si je permute 1 et 2, je change le signe. Si je permute 2 et 3, je change le signe. Donc si je fais 2 permutations successives, moins, moins, ça fait plus, j'ai encore 1. Donc ce sera le cas pour epsilon. 2, 3, 1, ainsi que pour epsilon. 3, 1. Et si on fait une seule permutation, on a moins 1. Ça sera le cas pour epsilon. 3, 2, 1. Pour epsilon. 2, 1, 3. Et pour epsilon. 1, 3, 2. D'accord ? Ça, c'est les seules permutations que vous pouvez faire avec 3 chiffres différents. 1, 2 et 3. Il y a 6 possibilités. Voilà. Sinon, si vous avez 2 chiffres identiques, voire 3 chiffres identiques, comme c'est antisymmétrique, forcément le résultat doit être nul. D'accord ? Donc c'est 0 dans tous les autres cas. En réalité, 3 x 3 x 3, ça fait 27 termes, qui se trouvent dans une sorte de Rubix Cube, qui est en fait, qui est représentée par 3 matrices successives dans 3 plans. D'accord ? Il y a 27 composantes. Vous avez

notes

résumé

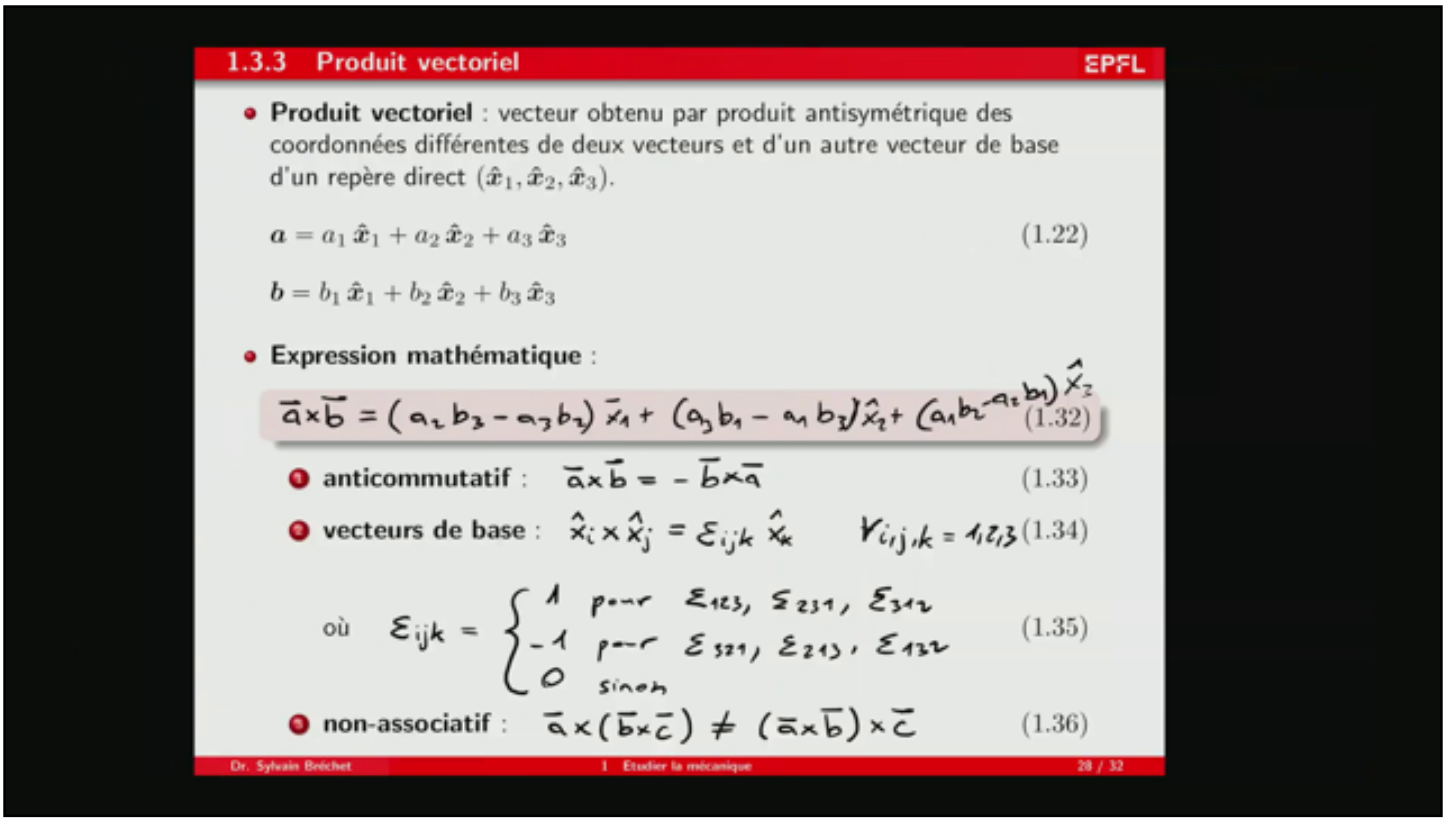
120m 49s



6 composantes non nulles, qui sont ces composantes-là. D'accord ? Donc, vous avez, avec cette règle de cuisine-là, vous retrouvez la structure du produit vectoriel. Bon. Ce produit vectoriel, il n'est pas associatif en général, ce qui veut dire qu'il faut faire attention à l'ordre des parenthèses. Donc le produit vectoriel du vector A, avec le vecteur obtenu par produit vectoriel des vecteurs B et C, sera, en général, même s'il y a des cas particuliers, différent du vecteur obtenu par produit vectoriel d'OI et de B, le produit vectoriel avec C. D'accord ? Ce n'est pas la même chose. Bon. Ce produit vectoriel, on peut aussi l'interpréter géométriquement et justement, cette interprétation est très intéressante.

notes

résumé

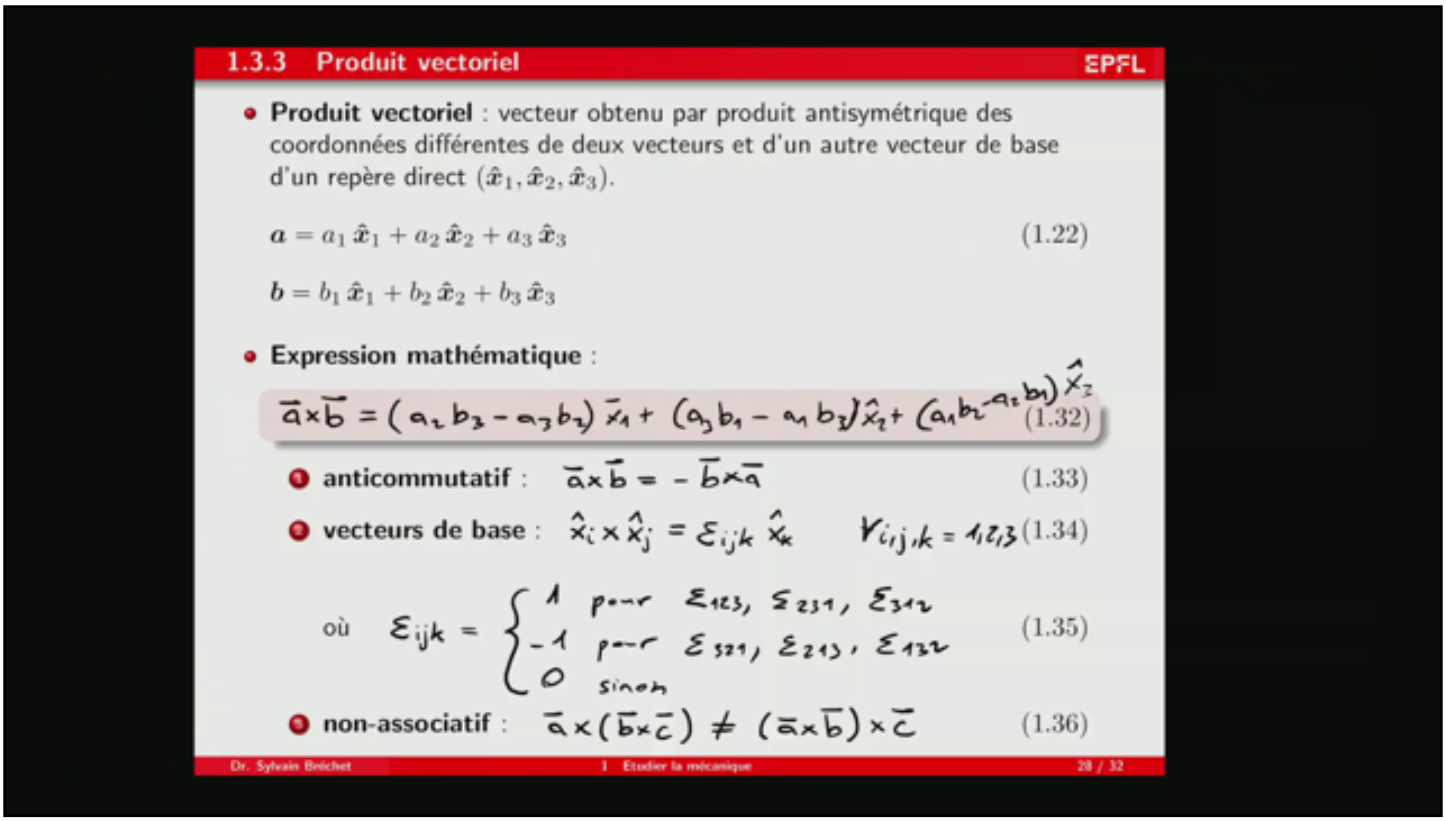


On va reprendre les vecteurs A et B qu'on avait précédemment, avec la même orientation par rapport au repère direct qu'on s'est choisi. D'accord ? Seulement maintenant, ces vecteurs A et B vont engendrer un parallélogramme qui se trouve ici qui aura un sens géométrique. Très clair, dans quelques instants. D'accord ? Alors, ce qu'on va faire, c'est qu'on va prendre la décomposition de A en A parallèle et en perpendiculaire, qui se reflète dans la représentation de ces vecteurs dans le repère direct, et on va simplement écrire la définition du produit vectoriel. Ce produit vectoriel attend complètement antismétrique, dans ce produit, apparaissent des composants de A et B qui sont différents, qui multiplient un vecteur unitaire encore différent. D'accord ? Alors, le facteur limitant ici, c'est B. B est orienté selon le deuxième axe. A a deux orientations possibles, le premier et le deuxième. Donc clairement, les termes qui vont apparaître, ça va être A1 et B2. D'accord ? Bon. Alors, si on prend la structure qu'on a définie, le tout premier terme, c'était A1 x B2 x X3 chapeaux. En condivence, non ? C'est A1 x B2, soit la norme de A, soit la norme de B, soit le sinus de l'angle entre les vecteurs, soit quoi ? Faut avoir le troisième vecteur unitaire qui a X3 chapeaux. Alors, ça en soi, c'est très intéressant. Parce que, prenez votre main droite. Vous alignez l'index de la main droite selon A. Vous alignez le majeur selon B. Dans le plan horizontal, qu'est-ce que vous voyez ? Le pouce est orienté selon l'axe vertical, selon X3 chapeaux. D'accord ? C'est l'orientation du produit vectoriel de A avec B. OK ? Donc en fait, si on regarde ce produit vectoriel, on voit que là aussi, même si, d'apparence, c'est pas le cas, il est indépendant du repère choisi pourquoi. Parce qu'on a le produit des normes des vecteurs, l'orientation relative

notes

résumé

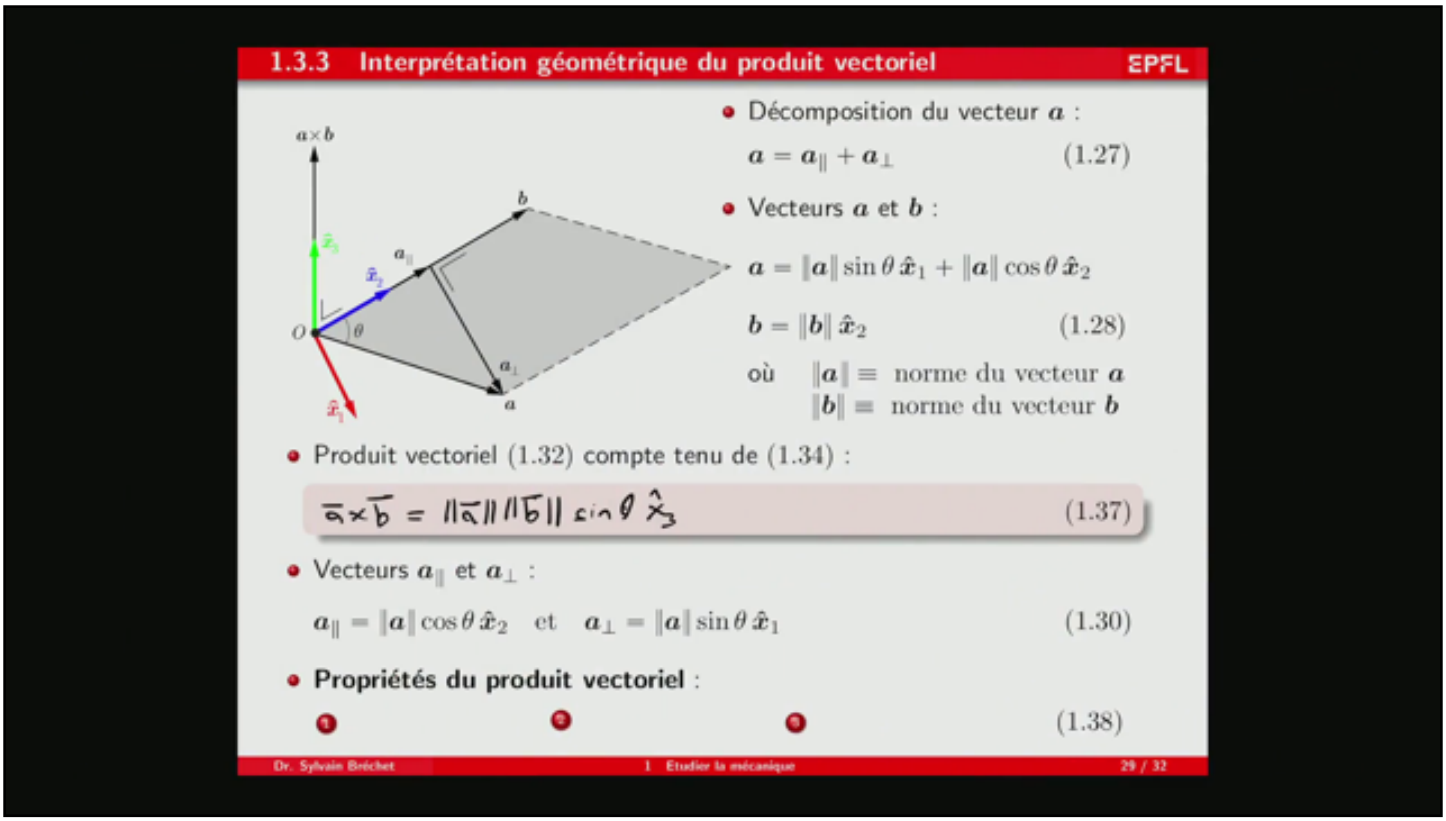
123m 35s



de l'un par rapport à l'autre, vous allez me dire, oui, mais bon, il reste X3 chapeaux. Oui, mais X3 chapeaux, il est simplement défini par le fait qu'on a la règle de la main droite, qui ici se trouve coincidée avec X3 chapeaux, mais si on avait fait une rotation du repère, on aurait eu autre chose. D'accord ? Donc là aussi, ce produit vectoriel est indépendant à la règle de la main droite près, d'accord ? Du repère choisi. Donc on a encodé en fait l'information contenue dans l'orientation relative de A et B en deux produits, un produit symétrique et le produit scalaire, un produit antisymmétique et le produit vectoriel, oui ? C'est juste que vous avez dit que le produit vectoriel peut-être un produit aussi. Je ne suis pas nerveux de voir ce que ça donne avec le produit vectoriel. Concrètement, c'est une bonne question. Alors je crois que je... Oui, je vais le... Voilà.

notes

résumé

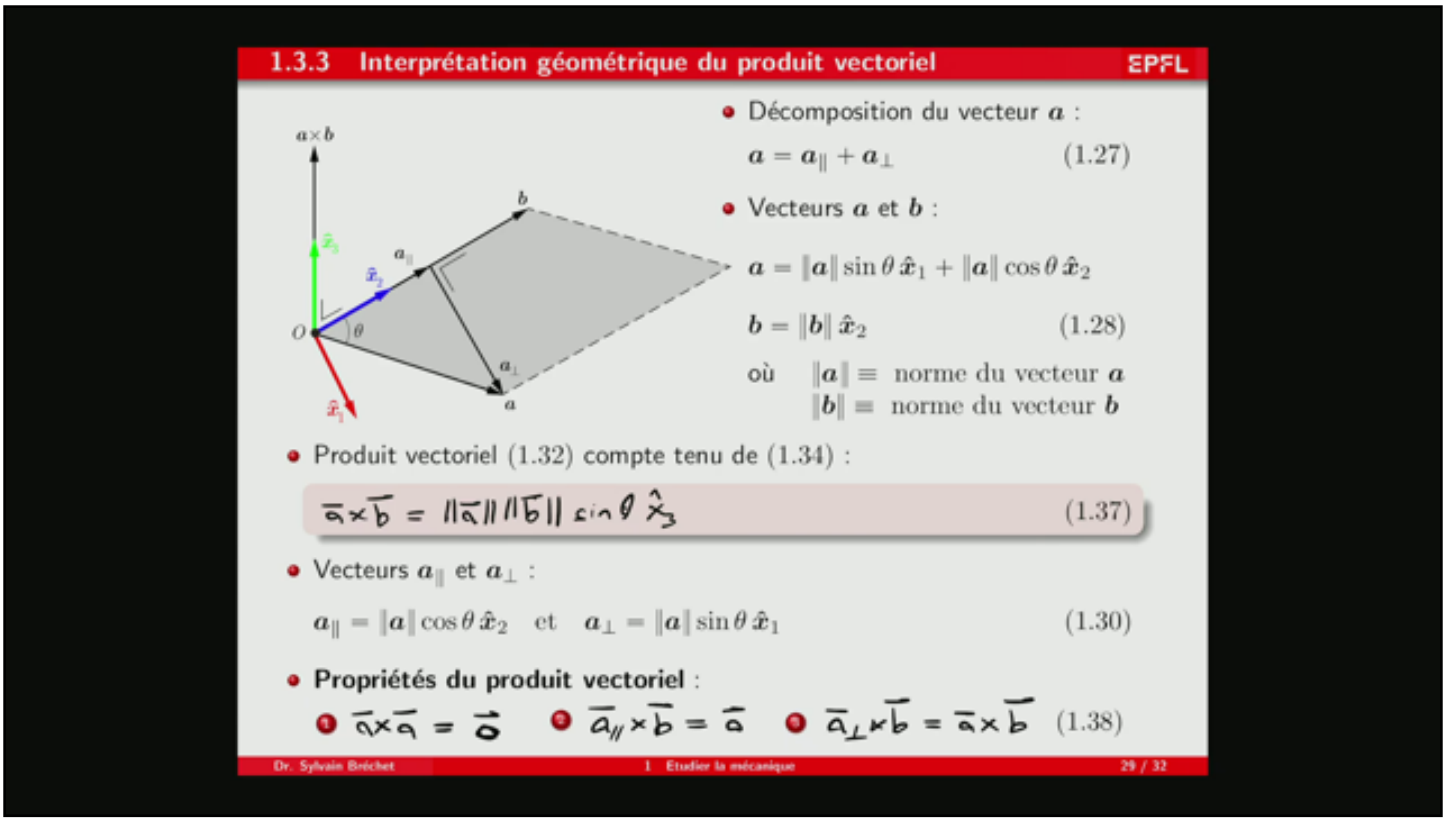


Si on revient en arrière, regardez bien, vous avez des composantes qui sont différentes. Ça, c'est la première chose. Et puis si vous prenez ces composantes, terme à terme, vous voyez que c'est antisymmétrique dans le sens où si on permute A et B, on va changer signe, d'accord ? Parce que si j'ai A2 x B3, je les permute, je tiens quoi ? A3 x B2, qui est justement l'opposé de l'autre. D'accord ? Qu'est-ce que je veux dire ? Donc terme à terme, c'est antisymmétrique. Ça va se refléter à ce niveau-là. C'est que je prends A et B, ils anticommutent. Si je les permute, si je les commute, d'accord, je change le signe. Et ça, c'est un sens du géométrique qui va être très clair dans un instant.

notes

résumé

126m 41s

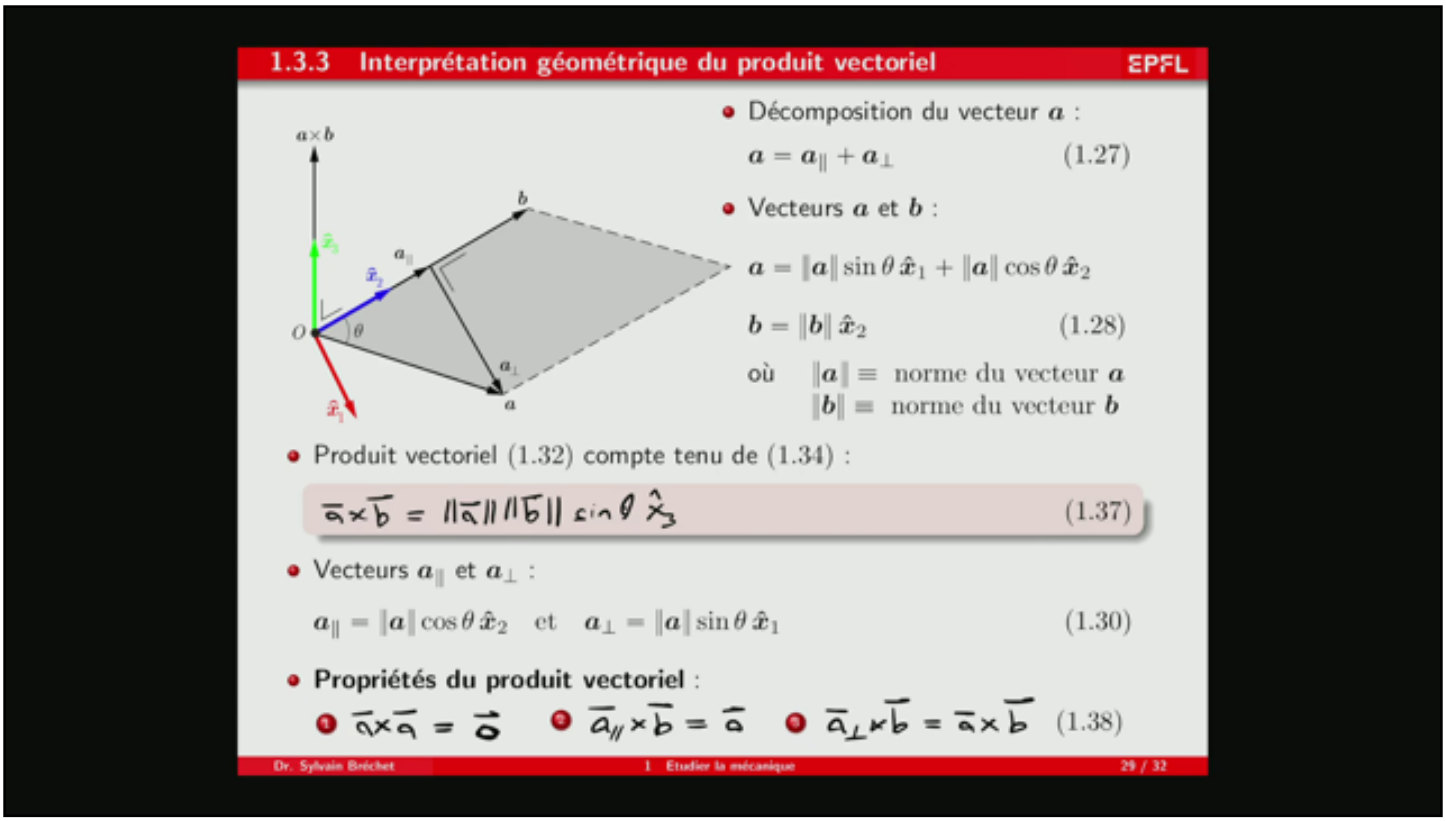


D'accord ? Donc, si on reprend ce produit vectoriel, donc l'orientation de x3 chapeau est donnée par la règle de... Pardon. Si elle doit x B est donnée par la règle de la main droite, ce sera toujours vrai. D'accord ? Donc, index, majeure, pouce. OK ? Et puis, la norme de ce produit vectoriel est intéressante. C'est quoi ? C'est la norme de A, fois la norme de B, fois le sinus de l'angle. On va le rapser, pour simplifier. Prenons un angle aigu, il sera de toute façon positif, le sinus sera positif. Fois la norme de x3 qui voit. D'accord ? C'est quoi la norme de B ? Fois la norme de A, fois le sinus de theta. Regardons la géométrie. Le vecteur B, il est là. Sa norme, c'est quoi ? C'est tout simplement la base du parallèle lograme. Et puis, si on prend la norme de A, qu'on le projette orthogonalment à B, on a la norme de A perpendiculaire. Le produit des deux, basse fauteur, c'est l'air du parallèle lograme. Et donc, la norme, la longueur du vecteur obtenu par produit vectorial de A et de B, représente en réalité une r. Et donc, ce vecteur est un faux vecteur. C'est un vecteur axial. Et ce vecteur traduit une surface. C'est pour ça que dans une algèbre où on a des éléments de plan orienté, ce vecteur est vraiment... se présenterait réellement comme un bivecteur qui est un élément de plan orienté. D'accord ? Et il y a cette dualité qui fait qu'on utilise soit une notation soit l'autre. D'accord ? Alors, continuons. Les propriétés du produit vectorial sont les suivantes. Si on fait le produit vectorial de A avec lui-même, on remplace B par A. L'angle entre le vecteur A et lui-même, c'est un angle nul. Le sinus d'un angle nul est nul. Donc, le produit vectorial est nul. Pourquoi ? Parce que

notes

résumé

127m 24s



l'air du parallèle lograme représente la longueur du vecteur. Or, si vous prenez deux vecteurs qui deviennent collinaires, le parallèle lograme a une surface nul. Voilà, le vecteur et le vecteur nul. Attention, un vecteur nul, c'est un zéro avec une flèche dessus. Ce n'est pas un zéro sans flèche. C'est un zéro sans flèche dans une algèbre, mais dans un espace vectorial, il faut distinguer l'escalaire des vecteurs. Donc, si vous plaît, mettez des flèches sur les zéro quand c'est des vecteurs. Mettez des flèches sur les vecteurs où les chapeaux s'y saient, des vecteurs unitaires, le casse-et-chis. Prenons maintenant le produit vectorial à parallèle avec B. Bon. Alors, si on prend A parallèle, il est orienté selon XO de chapeau, c'est-à-dire qu'il est colliné à B. Donc, ils ont des composantes non-nul qui sont identiques, puisque le produit vectorial est complètement tismétrique, ça nous donne tout de suite un résultat nul. En revanche, si on prend maintenant le produit vectorial de A perpendiculaire avec B, eh bien, on a le même résultat que si on prend le produit vectorial de A avec B. D'accord ?

notes

résumé

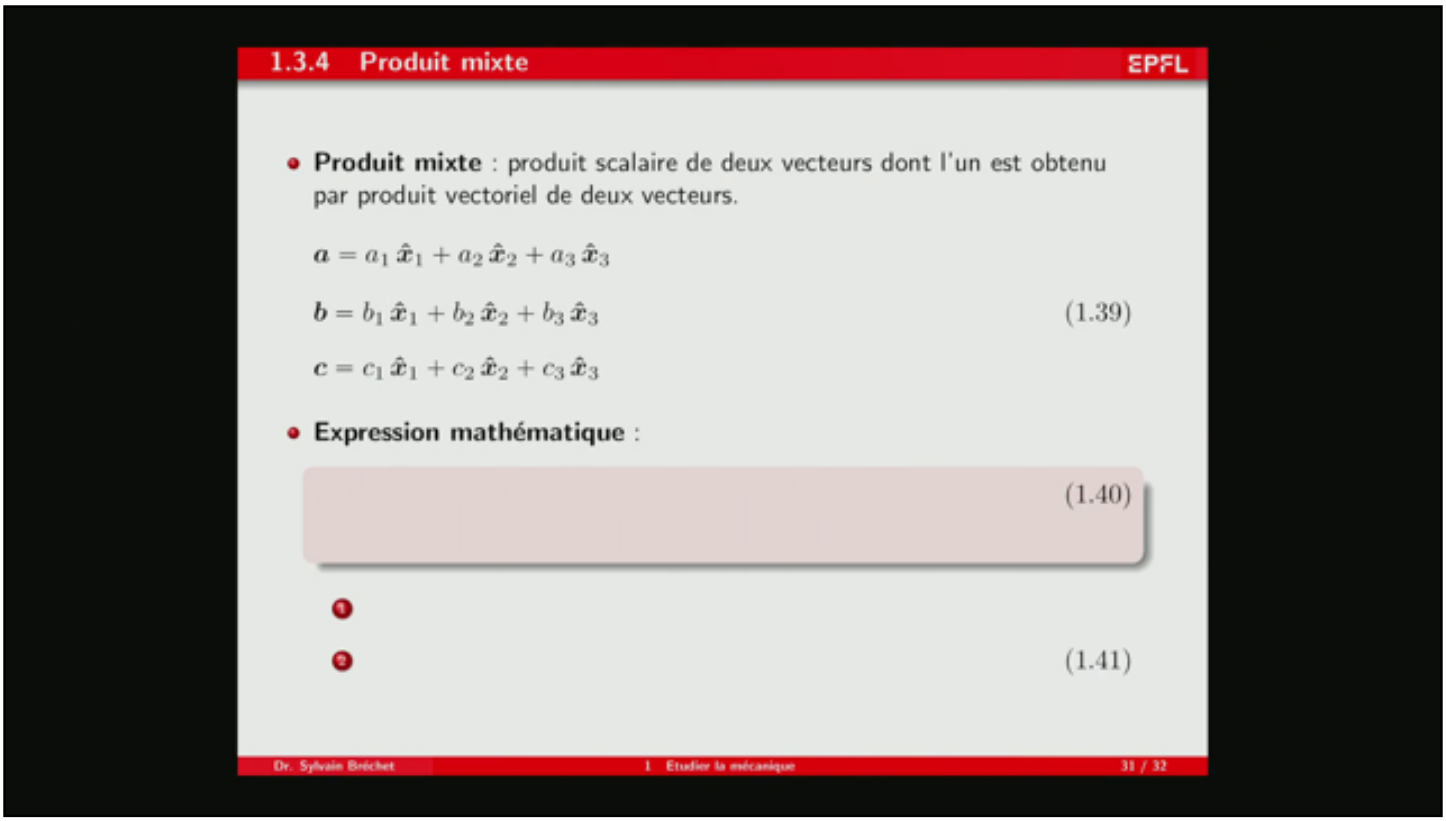


Donc, on voit que, quand on a un parallélisme, il y a une information nul. Cette information importante qui se cache dans le produit vectorial, c'est l'orthogonalité qui se trouve ici. Donc, ces produits se complètent. D'accord ? On a le parallélisme, symétrique, l'orthogonalité qui est antisymmétrique. Alors, pour visualiser bien ce que ça signifie concrètement, d'accord ?

notes

résumé

130m 18s

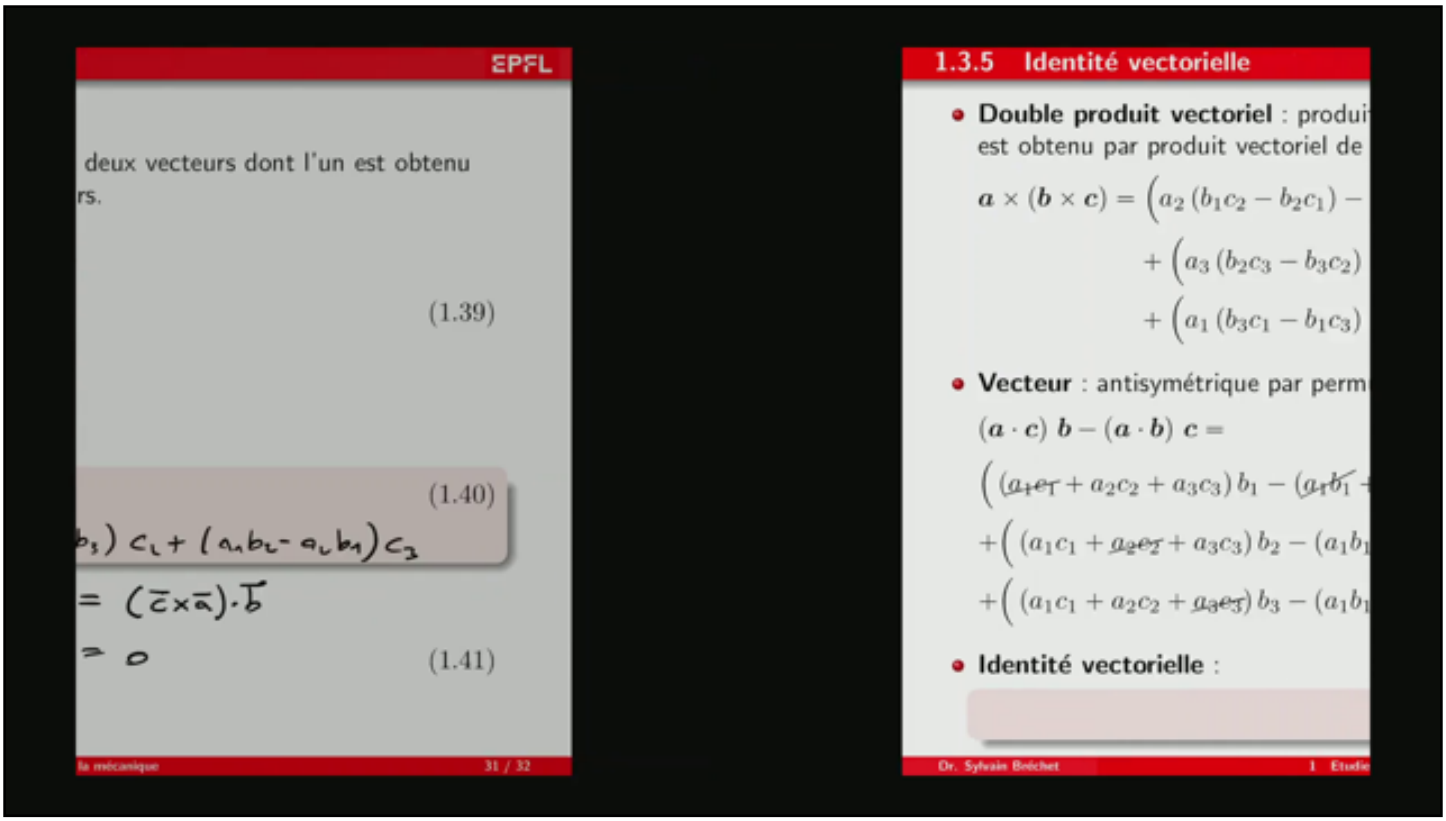


On va prendre ici le tir bouchon. Alors, si vous regardez le dessin qui s'affiche ici à l'écran, prenez la règle de la main droite, vous allez aligner le majeur... Non, l'index de la main droite selon A, le majeur selon B, et si vous faites ceci, d'accord ? Vous voyez que le pouce va rentrer dans le plan, comme cela. Vous pouvez s'y le faire avec un tir bouchon. Vous placez le tir bouchon tel que le manche soit orienté selon A, vous faites basculer, regardez bien, faites basculer le manche vers B, et vous voyez que le pas de vis s'enfonce dans l'yège, d'accord ? Qui serait le sagesse qui est derrière ? D'accord ? Donc, ça vous donne cette orientation-là. Que se passe-t-il maintenant si vous le faites dans l'autre sens ? Si vous le faites dans l'autre sens, vous faites le produit vectoriel de B, donc vous avez l'index selon B, le majeur selon A est le vecteur obtenu et de sens opposé, et ceci sera donc le produit vectoriel de B avec A, qui est l'opposé du produit vectoriel de A avec B. Pourquoi ? Parce qu'un mouvement de rotation dans un plan va se traduire selon l'axe de rotation par un vecteur qui le décrit, qui a simplement changé de signe. Dans ce sens ? Dans celui-ci, d'accord ? On visse, on dévisse, ok ? C'est pour ça qu'on a cette structure anticommutative entre A et B cachés dans la structure même du produit vectoriel. Bon, alors, dans le temps qu'il nous reste,

notes

résumé

130m 41s

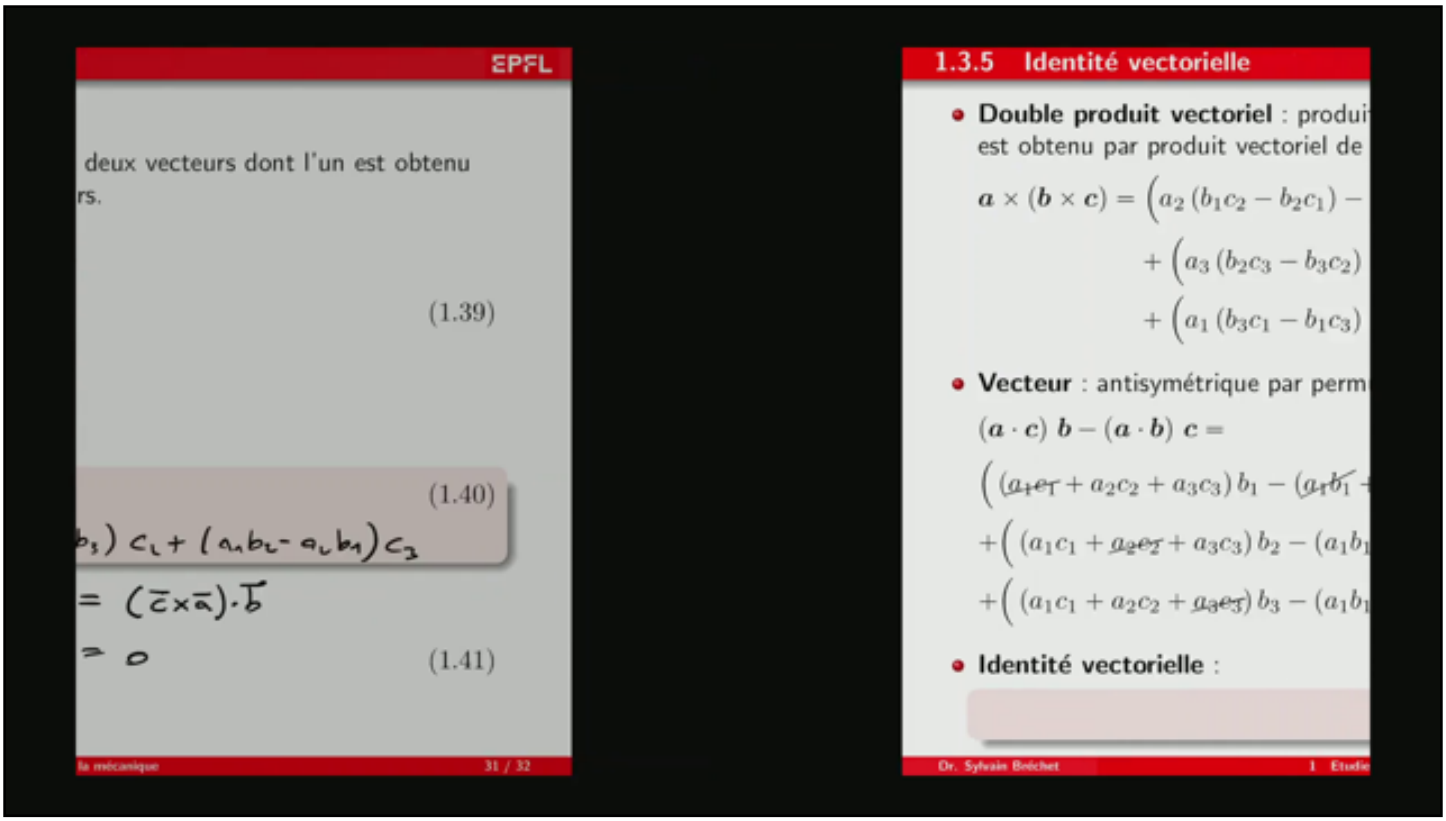


on va encore rapidement introduire le produit mixte de 3 vecteurs. Vous allez voir, ça va s'y aller. Les voilà écrits en composantes. Ce qu'on veut, c'est le produit scalaire d'un premier vecteur obtenu par produit vectoriel de A et de B avec un 2e vecteur, un 3e vecteur qui essaie. Et le composante du produit vecteur s'écrire les composantes du produit vectoriel de A avec B. On les connaît. Ces composantes, c'est A2 B3 moins A3 B2. Bon, termine, je laisse un peu de place, plus. A3 B1 moins A1 B3 plus... Non, là, j'ai oublié de laisser un peu de place, excusez-moi. Voilà. Plus A1 B2 moins A2 B1. D'accord ? Quand on fait un produit scalaire, qu'est-ce qu'on fait ? On multiplie les mêmes composantes des deux vecteurs. Donc, vous avez ici, entre parenthèses, les composants du vecteur obtenu par produit vectoriel de A et de B qu'on va multiplier par les composantes correspondantes de C, à savoir, C1, C2, et C3. Voilà le produit mixte. D'accord ? Ce produit mixte, il a des propriétés intéressantes. Si on écrit le produit mixte des vecteurs A, B et C, on trouve le même résultat que si on commençait avec le vecteur B, on aurait le produit vectoriel de B avec le suivant qui est C, produit scalaire avec le suivant, si il se trouve sur un cercle, qui est alors le premier. On aurait encore le même résultat que si on commençait avec le troisième produit vectoriel avec le suivant qui est le premier, produit vectoriel avec celui d'après qui est le deuxième. D'accord ? Pourquoi ? Parce qu'il y a une signification géométrique là-derrière. produit vectoriel de A avec B, ça donne quoi ? Ça donne un vecteur qui est orthogonal au plan généré par les deux premiers vecteurs dont l'orientation est donnée par la règle de la main droite. D'accord ? Ce vecteur a une longueur,

notes

résumé

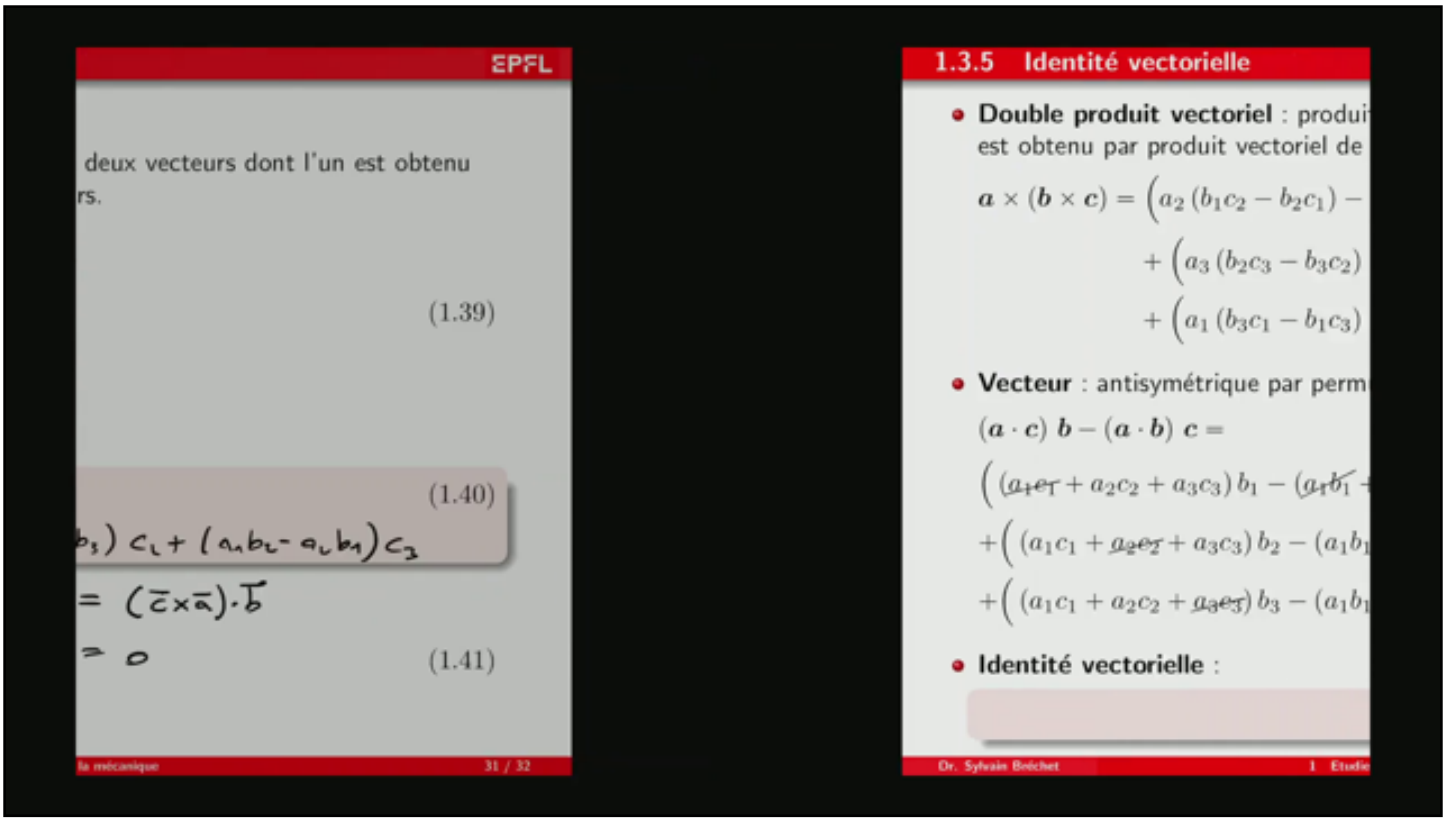
132m 18s



une norme qui correspond au parallélogramme engendré par les deux premiers vecteurs. Vous faites le produit scalaire avec un troisième vecteur qui est non complamé, ce que vous allez essentiellement obtenir c'est un scalaire. Et si vous les avez pris dans le bon sens, ce scalaire va représenter le volume du prisme engendré par les trois vecteurs. D'accord ? Et donc, si au lieu de commencer par le premier, vous commencez par le deuxième, si vous le prenez dans le bon sens, vous calculez le même volume trois fois. D'accord ? D'où l'invariance par permutation cyclique de ces vecteurs. Si maintenant vous décidez de remplacer c soit par A soit par B d'accord ? Le résultat sera nul pour quoi ? Parce que le troisième vecteur du prisme, vous l'avez placé dans le plan qui contient les deux premiers, donc vous avez un prisme de volume nul, tout simplement. Puis, algébricement, le produit vecteuriel de A avec B est orthogonal au plan généré par A et par B, donc le produit scalaire est nul. D'accord ? Alors, pour ceux que ça intéresse, je vais vous lancer un défi pour trois heures. Si vous connaissez bien le produit vecteuriel qui l'a plus surprise pour vous, je vous propose de me donner une formule qui permet de trouver le produit vecteuriel de deux vecteurs en deux dimensions et en quatre dimensions. Vous l'avez obtenu en trois dimensions. D'accord ? Qu'est-ce que ça donnerait en deux et qu'est-ce que ça donnerait en quatre dimensions ? Et puis on en rediscutera à la fin du cours, à quatre heures. D'accord ? C'est un petit challenge, intéressant. Voilà, il reste encore dernière chose à faire que j'aimerais rapidement faire avec vous avant de prendre la pause. C'est une identité vectorielle qui est essentielle pour la suite. On ne va pas écrire tout le développement parce que c'est très long à faire. Si vous avez trois

notes

résumé



vecteurs et que vous prenez le produit vecteuriel du produit vecteuriel, donc le produit vecteuriel de A avec le vecteur obtenu par produit vecteuriel de B de C, vous appliquez la définition du produit vecteuriel de manière iterative deux fois et vous tombez sur ces termes-là. Bon, qu'est-ce qu'on voit en regardant ce produit ? Ce produit, il est orthogonal à A, très bien. Donc forcément, ça va être une combinaison linéaire de B et de C. D'accord ? Qui plus est, les facteurs qui multiplient B et C doivent être des scalaires liés aux autres vecteurs, d'accord, soit A, C et A et B respectivement. Du à l'antissimétrie qui est cachée dans le produit vecteuriel de B et de C, vous avez une fois avoir un C, une plus, une fois un C de moins et vous voyez que si vous le calculer de cette manière, vous allez avoir en appliquant la définition une série de termes qui vont apparaître. En réalité, vous allez vous retrouver avec trois fois six termes, donc vous avez 18 termes et les termes complètement symétriques se simplifient, il reste des autres termes qu'on retrouve ici et donc on voit immédiatement que le produit vectoriel de A avec le vecteur obtenu par produit vectoriel de B et de C, c'est égal au produit scalaire de A avec C fois B, moins le produit scalaire de A avec B fois C et C, cet résultat-là sera d'une importance absolument vitale dans l'étude des rotations au sens général qu'on va retrouver dans le cadre du modèle du point matériel du sol inindiformable. Sur ça, je vous souhaite un excellent appétit, d'accord et on va se retrouver à trois heures pour la suite, c'est-à-dire les applications de cette partie mathématique.

notes

résumé