Support de cours

Cours:

PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet)

Vidéo:

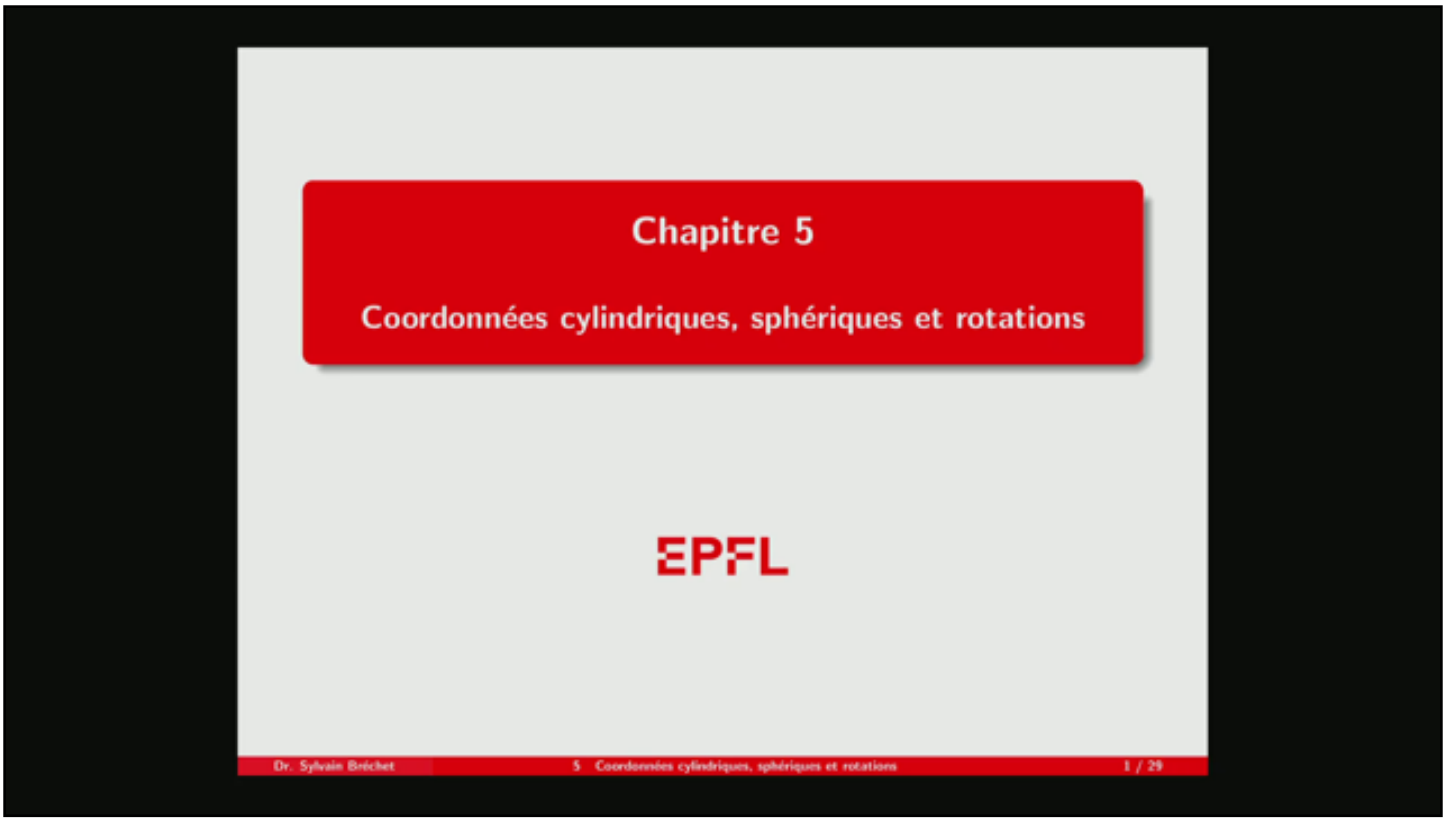
5 - Coordonnées cylindriques, sphériques et rotations

Concepts (extraits des sous-titres générés automatiquement) :

Aller de haut. Premier vecteur. Coordonnées cartesiennes. Orientation des vecteurs unitaires. Plan horizontal. Plan vertical. Coordonnée cylindrique. Coordonnées polaires. Fonctions trigonométriques d'un argument. Symétrie de rotation. Vecteur vitesse. Vecteurs unitaires. Premier abord. Point matériel. Angle phi.

vers la recherche de séquences vidéo
(dans PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet).)

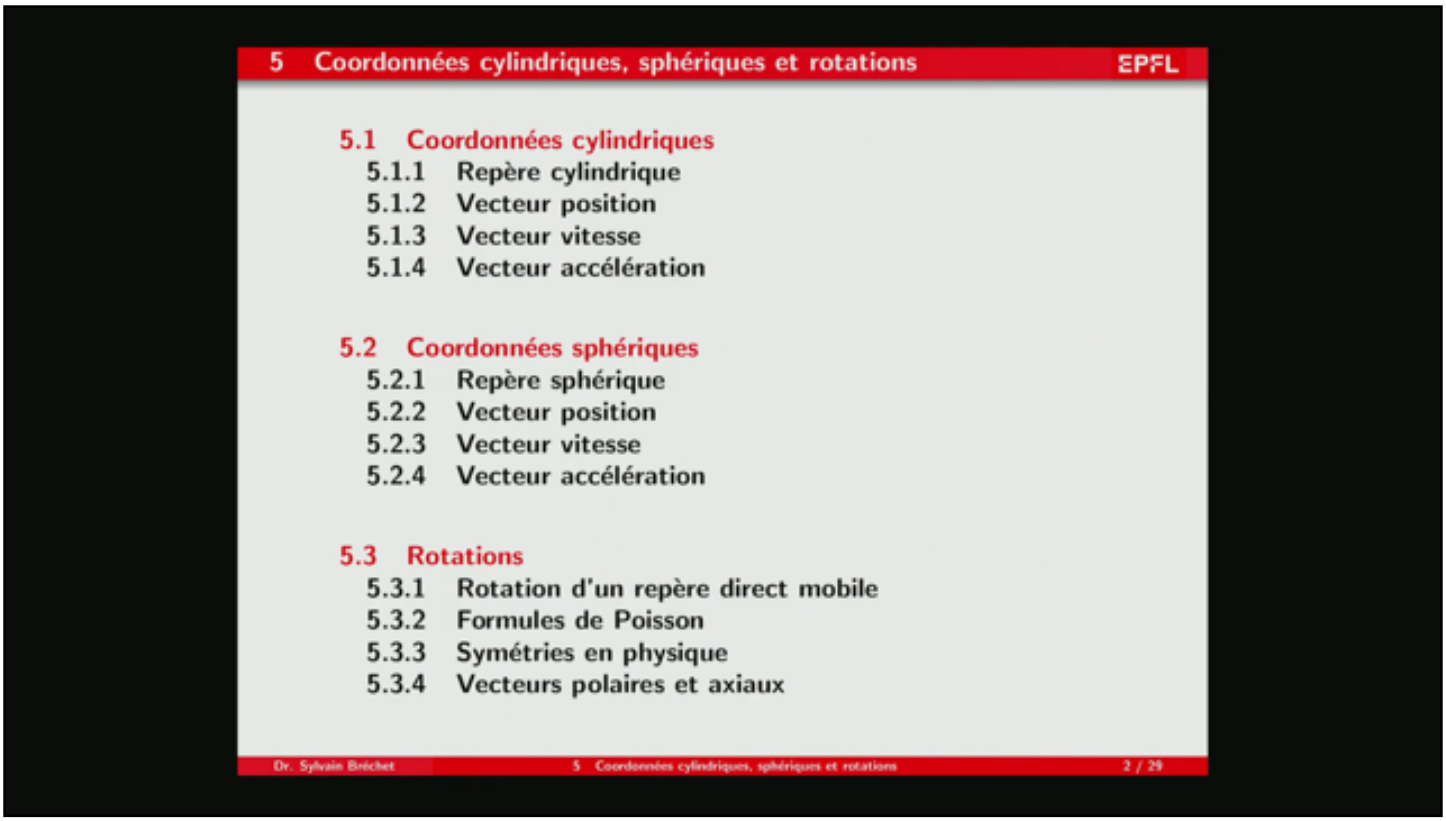
vers la vidéo



...

notes

résumé



Ces sous-titres ont été générés automatiquement Voilà, bonjour à toutes et à tous. On a commencé deux minutes en retard parce que le préparateur de courant a préparé quelque chose de fantastique avec une imprimante 3D. Si vous regardez le mot qui s'affiche, vous voyez particules. Maintenant, regardez ce qui se passe quand je le tourne de 90°. Vous voyez honte, particle et wave. C'est en fait le principe qui se cache derrière la structure de la mécanique quantique. Le principe de dualité honte une honte d'une particule dont on parlera plus en détail au tout dernier chapitre de secours. Je me permets de faire déjà un petit peu de pub.

notes

résumé

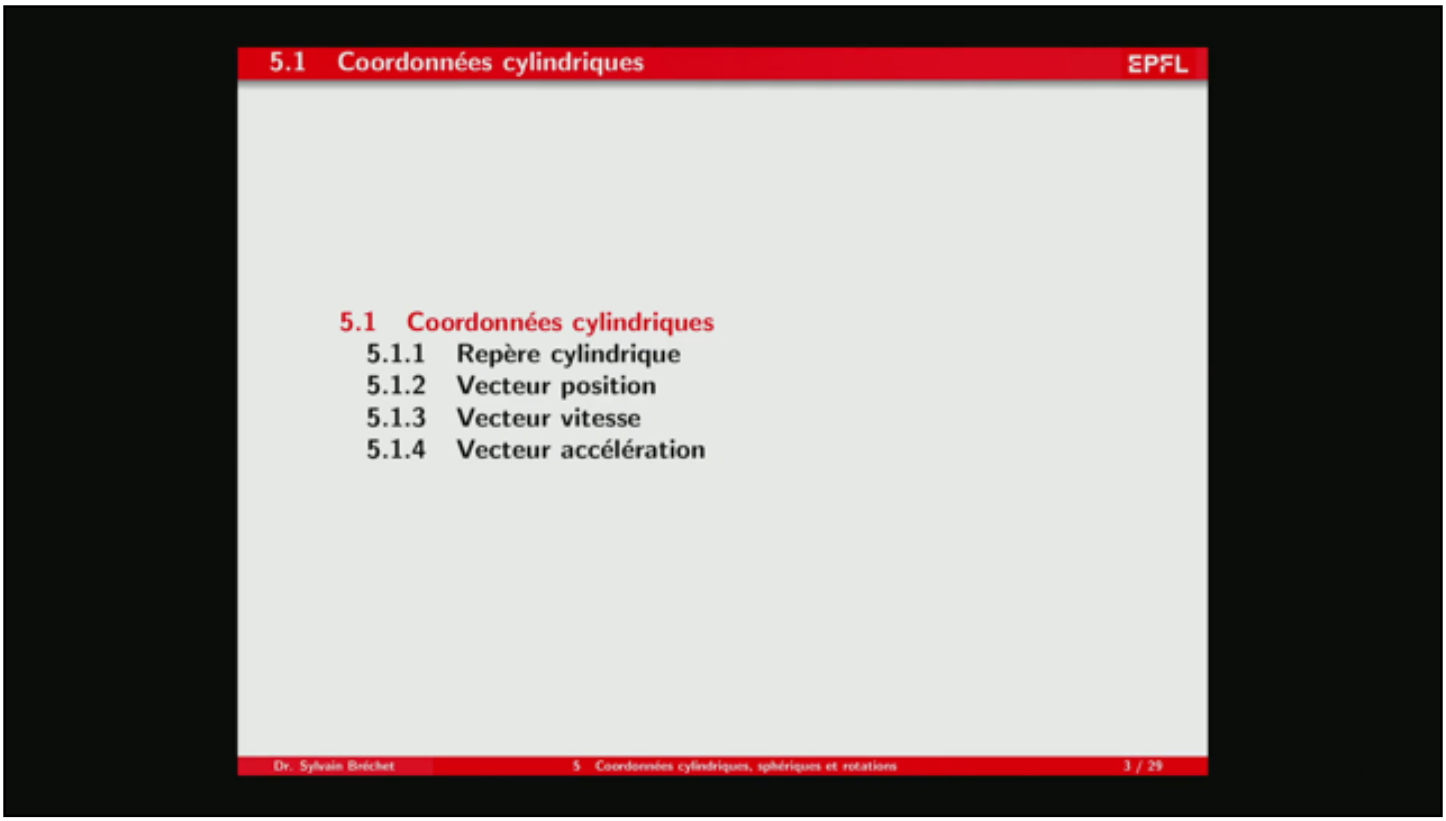
0m 1s

5.1 Coordonnées cylindriques
5.1.1 Repère cylindrique
5.1.2 Vecteur position
5.1.3 Vecteur vitesse
5.1.4 Vecteur accélération

notes

résumé

0m 53s



Vous en conviendrez, c'est assez compliqué pour quelque chose d'assez simple, un mouvement qui se fait sur un rayon constant avec un an qui varie au cours du temps. Pourquoi pas prendre comme coordonnée le rayon et l'angle ? C'est coordonnées et ce sont les coordonnées polaires. Et là, la description, elle est beaucoup plus simple. C'est ce genre de choses qu'on va faire ensemble. On veut rendre la physique plus transparente, plus parlante, plus simple. Il y a quelques difficultés conceptuelles, quelques pièges qui se cachent derrière un repère en coordonnée cylindrique et un repère en coordonnée sphérique. C'est des repères mobiles qui sont attachées à l'objet, attachées au point matériel. Imaginez que le point matériel correspond ici à la paume de ma main. Alors si j'ai un repère cylindrique, je vais prendre par exemple le premier vecteur qui serait mon index, le deuxième qui serait le majeur, le troisième qui serait le pouce. Imaginez que le point matériel en question décrive une trajectoire circulaire comme ceci. Regardez bien les droits. Vous voyez que le pouce ne change pas d'orientation, il est toujours verticalement orienté vers l'eau. En revanche, quand je tourne comme ça, je monte et je descends, je tourne, ce qu'on voit lors d'une rotation, c'est que l'orientation des vecteurs unitaires, radiales et tangentiels, change au cours du temps. Ça veut dire quoi ? Ça veut dire que leur dérivé temporel est non nul. Et ça, c'est essentiel. Alors encore donner cylindrique, c'est gérable, c'est déjà subtil, faut faire attention. Encore n'esphérique, ça se complique. Pourquoi ? Parce que non seulement on peut avoir un mouvement de rotation dans un plan horizontal, mais en plus, on peut avoir un mouvement de rotation dans un plan vertical. Donc tous les vecteurs peuvent changer d'orientation au cours du temps. Il faudra déterminer leur dérivé temporel. On fera ceci gentiment, progressivement.

notes

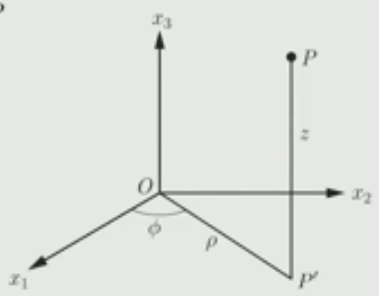
résumé

5.1 Coordonnées cylindriques

EPFL

- Les coordonnées cylindriques sont adaptées pour décrire un mouvement avec une symétrie cylindrique.
- **Coordonnées cartésiennes :** point P

  $P = (x_1, x_2, x_3)$
- **Coordonnées cylindriques :** point P



- **Lien géométrique :**
  1.
  2. (5.1)
  3.
- **Coordonnées polaires :** coordonnées cylindriques dans le plan $z = 0$

notes

résumé

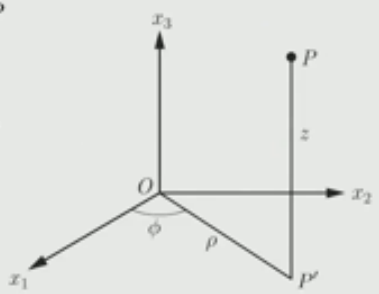
5m 7s

5.1 Coordonnées cylindriques

EPFL

- Les coordonnées cylindriques sont adaptées pour décrire un mouvement avec une symétrie cylindrique.
- **Coordonnées cartésiennes :** point P

  $P = (x_1, x_2, x_3)$
- **Coordonnées cylindriques :** point P

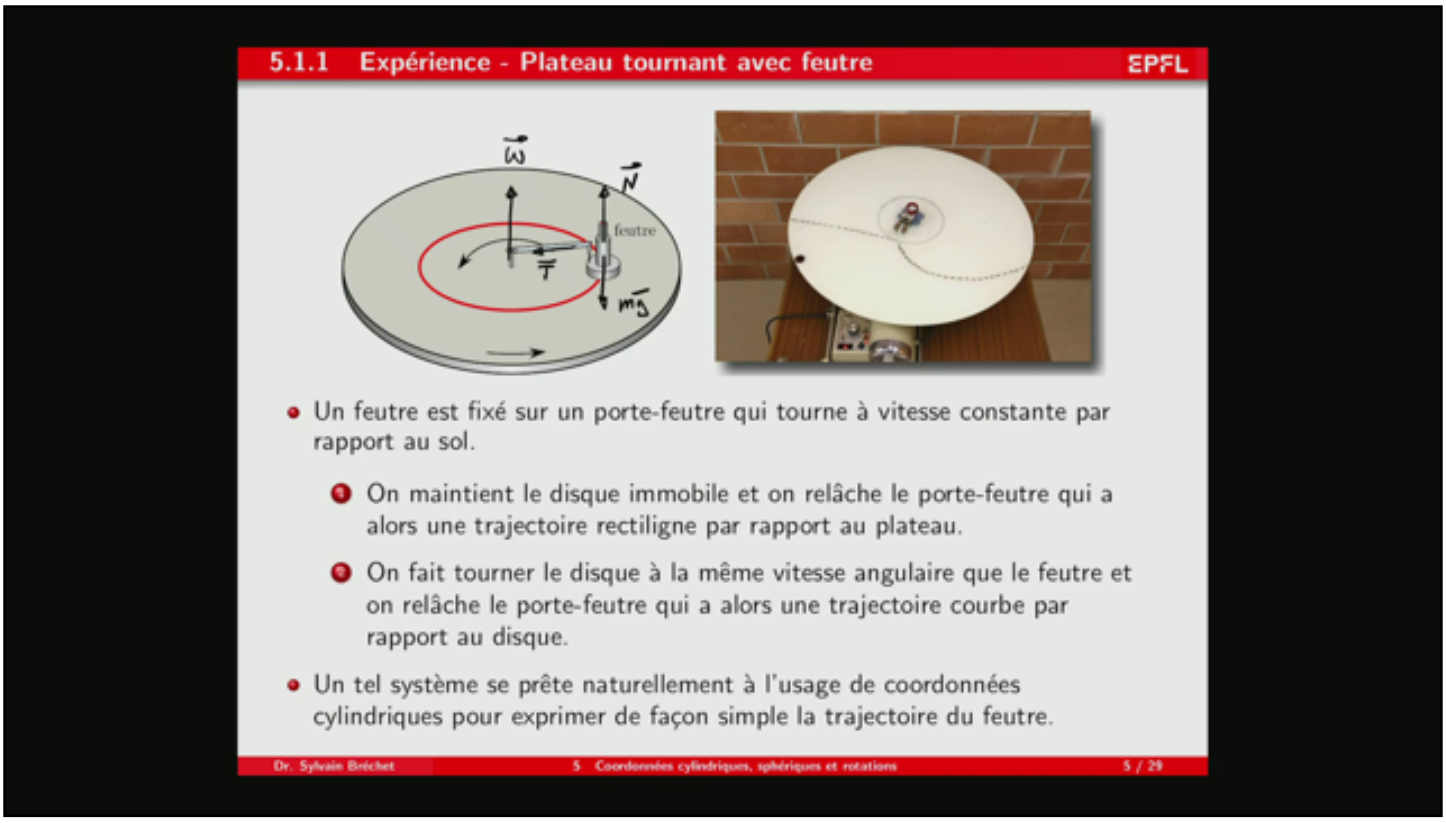


- **Lien géométrique :**
  1.
  2. (5.1)
  3.
- **Coordonnées polaires :** coordonnées cylindriques dans le plan $z = 0$

va être la notion de ligne de coordonnées. Et ensuite, on viendra positionner des vecteurs unitaires torgeons à ces lignes de coordonnées, qui sont soit des lignes, soit des courbes. Et ça, ça définira notre repère. Et on verra que ce repère est un repère direct si on prend les coordonnées dans le bon ordre. Donc l'ordre sera essentiel. Ok ? On va ensuite chercher la formule de changement de base qui nous permet de passer de l'ancienne base, la base cartesienne, du repère cartesien, un nouveau repère, le repère cylindrique, qui sera simplement lié à une rotation dans le plan horizontal. On définira le vecteur position. On va le dériver par rapport au temps. Pour obtenir le vecteur vitesse, la tension, il faudra qu'on dérive par rapport au temps les vecteurs unitaires qui peuvent changer d'orientation au cours du temps. D'accord ? On trouvera le vecteur vitesse. On interprétera physiquement tous les termes obtenus. On va redériver une deuxième fois par rapport au temps pour trouver le vecteur accélération. Et là aussi, faire une interprétation au paire. Pour le vecteur accélération au coordonnées cylindriques, on va se retrouver avec cinq termes. Il y en aura un petit peu plus en coordonnées sphériques. Commençons tout de suite

notes

résumé

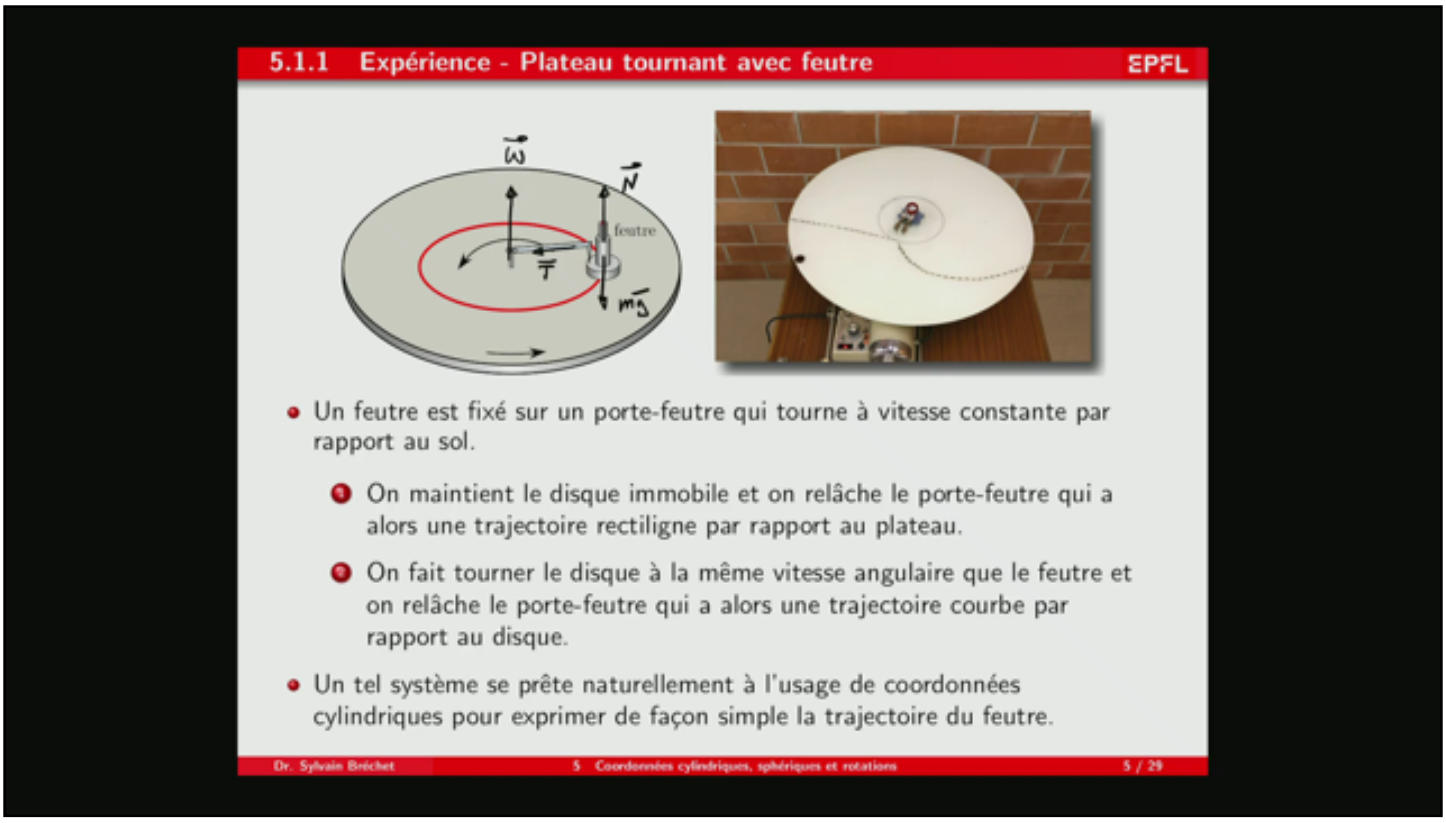


par introduire les coordonnées cylindriques. À quoi elles servent concrètement ? En général, on les rencontre. Quand on a un problème de rotation autour d'un axe et qu'on veut décrire la rotation avec un vecteur vitesse angulaire, par exemple, il va être orthogonal au plan de rotation. Naturellement, vous avez une symétrie circulaire dans le plan de rotation et vous avez un axe orthogonal, ce qui suggère l'usage de coordonnées cylindriques. On verra un exemple parlant et intéressant du point de vue de la physique dans quelques instants. Lorsqu'on a introduit les coordonnées cartesiennes, qu'est-ce qu'on a fait concrètement ? On est parti d'espace à trois dimensions et chaque fois en spécifiant une coordonnée, on a introduit un plan orthogonal à l'axe de coordonnées qui passe par le point P. On a introduit une contrainte mathématique modélisée par une équation. Si vous avez un système de trois équations à trois inconnues, vous allez pouvoir identifier le point d'intersection entre les trois plans, qui est le point P. Maintenant, on aimerait faire quelque chose de similaire, sauf qu'on veut le faire avec la symétrie cylindrique. On va prendre notre point P, qui devra là aussi être déterminé par trois coordonnées, puisqu'on est en trois dimensions, et qu'un point est un objet de dimension zéro. Il faut trois contraintes. La première contrainte, ce sera un cylindre vertical de rayons rô, qui passe évidemment par le point P. Rô va être ici la coordonnée radiale dans le plan horizontal, la partie d'origine. C'est la distance qui sépare la projection du point P, son orthogonal du point P sur le plan horizontal de l'origine. Il faudra, par rapport à ce cylindre vertical, qu'on trouve une orientation dans le plan horizontal. Ceci va le faire grâce à un demi-plan vertical, qui est issu de l'axe OX3 et qui passe par le point P. Le voici. C'est la deuxième coordonnée. Cette coordonnée est en fait la

notes

résumé

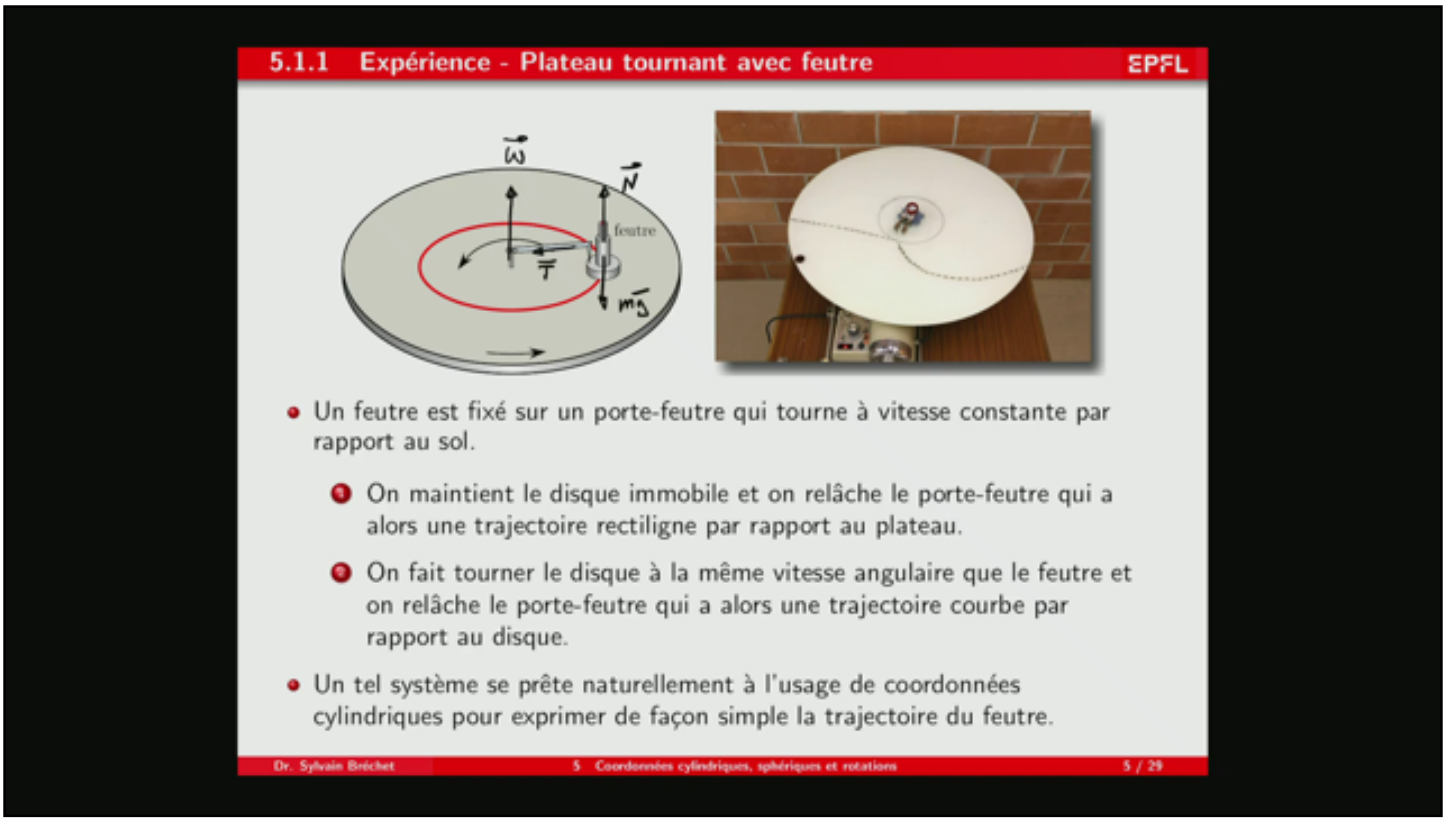
8m 20s



coordonnée angulaire qui est ici. Le plan qu'on vient d'introduire, on le définit par rapport au plan vertical de référence qui est ici, définie par les axes OX1 et OX3. L'angle entre ces deux plans, c'est l'angle phi. La coordonnée radiale rô est donnée en maître, l'angle phi n'a pas d'unité physique. Les coordonnées n'ont pas besoin d'avoir les mêmes unités physiques. Il faut faire attention à ça. Une fois qu'on a rô et qu'on a phi, on a déterminé P prime dans le plan horizontal. On n'a pas encore P. Il faut la distance qui sépare P de P prime. C'est la deuxième coordonnée verticale Z. Si on prend nos coordonnées de départ, X1, X2 et X3, on peut les exprimer en termes des nouvelles coordonnées des coordonnées synagriques. Commençons par la plus simple. La coordonnée verticale, la coordonnée Z, c'est la coordonnée X3. Les deux autres sont dans le plan horizontal. On prend le point P. On le projette selon une projection orthogonal dans le plan horizontal. Maintenant, c'est que le vecteur op a pour norme rô. Là, c'est en perspective, il faut faire attention. Mais on fait une projection sur le catet, qui est le catet adjacent à l'angle phi, pour trouver la coordonnée X1. On aura la coordonnée radiale rô multipliée par le cosine de l'angle phi. Pour projeter, selon l'axe des ordonnées, au X2, on va projeter sur le catet qui est opposé à l'angle phi. On pourrait projeter ici, c'est pareil. On aura donc rô fois le sinus de l'angle phi. On ne s'est pas très compliqués. Et surtout, ce qu'on voit apparaître ici, c'est une structure qui va être utile dans la pratique. C'est un cas particulier des coordonnées synagriques, que sont les coordonnées polaires. Les coordonnées polaires décrivent un mouvement de rotation dans un plan, par exemple. Le plan qui sort naturellement de cette description, c'est le plan qui contient l'origine. Et

notes

résumé



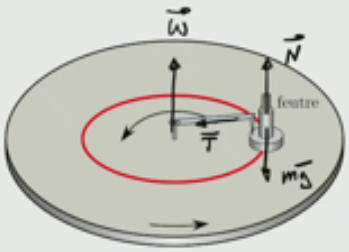
donc pour passer des coordonnées synagriques aux coordonnées polaires, c'est quelque chose qu'on peut écrire en marge, qui est très important, il suffit d'affirmer que Z est constant et que Z vaut zéro. D'accord ? Ça sera vrai pour les vitesses, ça sera vrai aussi pour les accélérations. Alors pour voir un petit peu à quoi ça peut servir, ces coordonnées synagriques, on va maintenant prendre un exemple avec un feutre qui tourne sur un disque. D'accord ? Alors d'abord, on va faire tourner le feutre dans un portefeutre, à vitesse angulaire omega. Alors dans l'image de gauche, le vecteur vitesse angulaire omega est orienté vers le haut. On a une rotation, si vous prenez le pouce, et vous mettez omega le long du pouce orienté vers l'eau, vous voyez que la paume de la main droite tourne dans le sens trigonométrique. Et la rotation se fait comme ceci dans les sens trigonométrique. Alors quelles sont les forces qui sont exercées sur le feutre ? Le feutre avec le portefeutre d'ailleurs. Eh bien il y a son propre poids, MG qui est orienté vers le bas. Vous avez aussi la force de réaction normale du plan, du disque, qui est orientée vers l'eau, qui est égal et opposée, sinon le feutre s'enfoncerait dans le disque, c'est clairement pas le cas. Et puis le feutre et le portefeutre sont accrochés ici à un bras qui lui va exercer une force de tension vers l'intérieur et contraindre ainsi le mouvement du feutre et du portefeutre sur une trajectoire circulaire. Oui ? C'est le vecteur vitesse angulaire ? C'est le vecteur vitesse angulaire, tout à fait. Celui qu'on a introduit la semaine passée en fait. C'est exactement celui-ci. Donc on va ici avoir un mouvement circulaire et au moment où on va relâcher le point d'attache avec le bras, donc on a ici un dispositif qui permet de relâcher le feutre et le

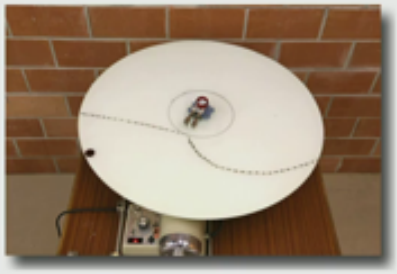
notes

résumé

5.1.1 Expérience - Plateau tournant avec feutre

EPFL



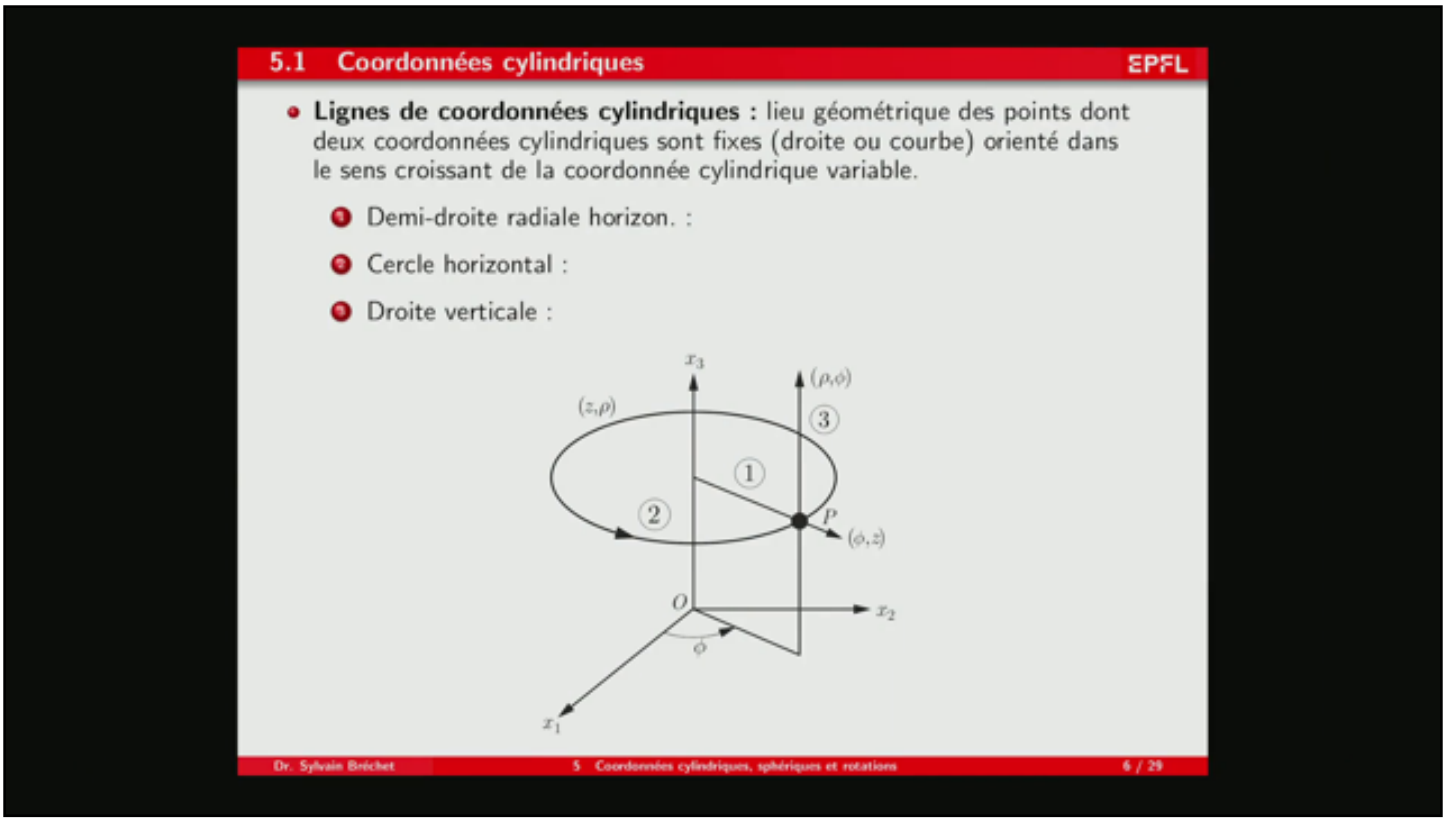


- Un feutre est fixé sur un porte-feutre qui tourne à vitesse constante par rapport au sol.
  1. On maintient le disque immobile et on relâche le porte-feutre qui a alors une trajectoire rectiligne par rapport au plateau.
  2. On fait tourner le disque à la même vitesse angulaire que le feutre et on relâche le porte-feutre qui a alors une trajectoire courbe par rapport au disque.
- Un tel système se prête naturellement à l'usage de coordonnées cylindriques pour exprimer de façon simple la trajectoire du feutre.

portefeutre, d'accord ? Le feutre et le portefeutre aura une vitesse tangentiale. C'est le moment voilà, à ce moment-là, la somme des forces est nulle. Donc on va se retrouver avec un mouvement rectiligne, uniforme, d'accord ? Ça, on le dit, mais c'est le cas simple. Le cas simple qu'on va visualiser ensemble maintenant. Alors, il est bien accroché, ça semble être le cas. Je vais enlever de bouchons, voilà. Et on va faire tourner l'ensemble assez vite. Et on va le relâcher avec l'autre feutre. Voilà, donc vous pouvez clairement voir ici, d'accord ? La trajectoire circulaire et ensuite, le mouvement rectiligne uniforme, d'accord ? Que se passerait-il maintenant, dans un cas plus intéressant ? Ou... Ou en fait, le portefeutre et le disque tournent à la même vitesse angulaire. C'est-à-dire que, par rapport au disque, d'accord, le portefeutre est immobile. Il a un mouvement de rotation par rapport au sol. Et par rapport au disque, il n'y a pas de mouvement relatif. Alors, pour le voir, il faut enlever tous les petits supports qui sont ici. Voilà. On refait l'expérience avec une vitesse angulaire un peu moindre. Alors là, quand on va lâcher le feutre, la physique par rapport au sol n'a pas changé. La somme des forces est nulle, et donc le mouvement

notes

résumé

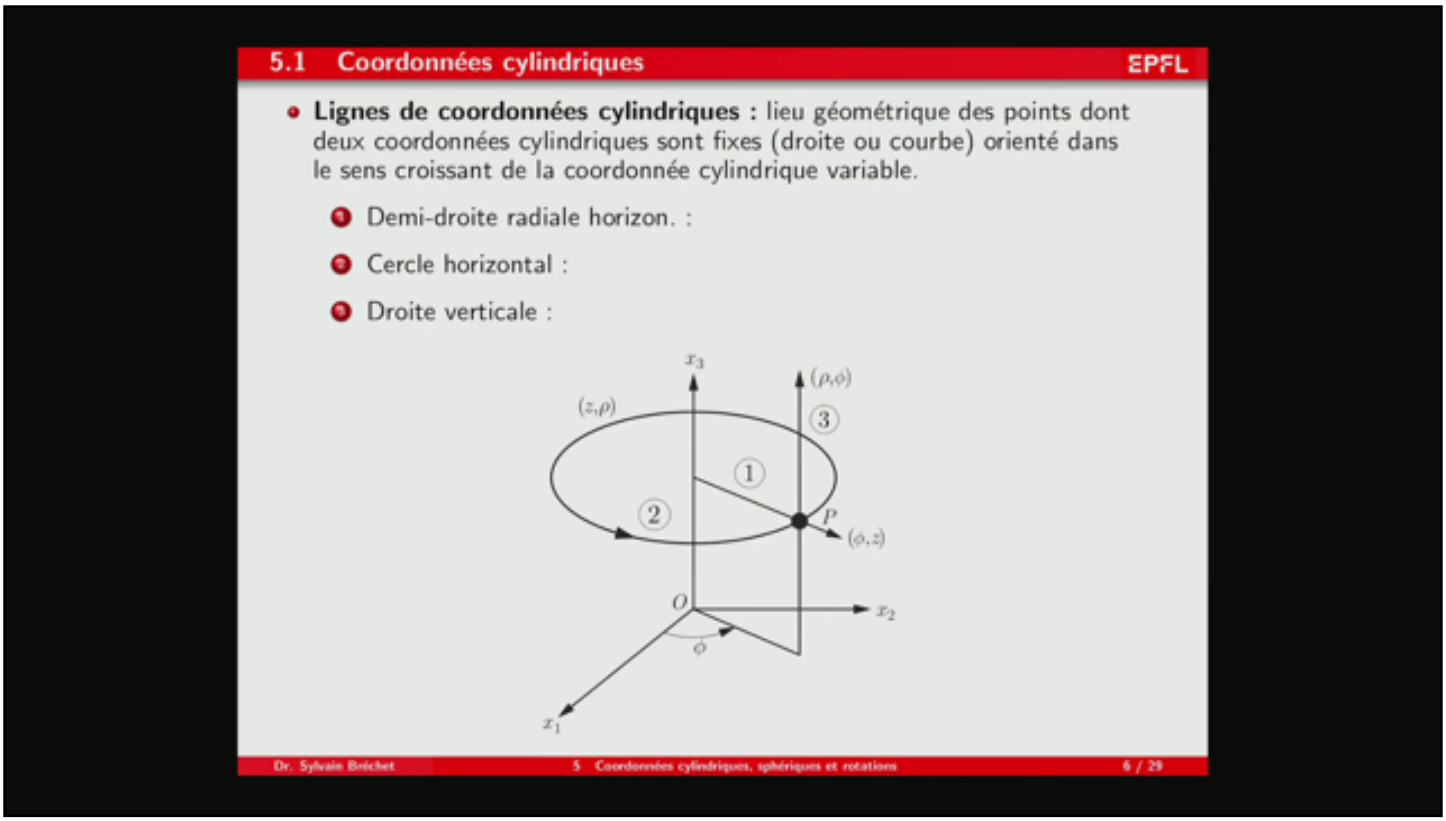


sera un mouvement rectiligne uniforme par rapport au sol. D'accord ? En revanche, le disque tourne. Donc, par rapport au disque, ça sera beaucoup plus compliqué. Plus intéressant aussi. Qu'est-ce qu'on a obtenu ? La spirale qu'on voit ici. D'accord ? Quelle a été l'orientation du vecteur vitesse angulaire ? La rotation s'est faite dans le sens trigonométrique. Le vecteur vitesse angulaire est orienté vers le haut. J'ai peut-être juste noté ici. Attendez, je m'assois justement trompé. Alors, où est-ce ? Voilà. Il est orienté vers le haut, pas vers le bas. Donc, il sort ici, du plan. Ça, c'est le vecteur vitesse angulaire. Maintenant, attendez, voilà. Voilà. Alors, pourquoi est-ce qu'on a obtenu cette trajectoire ? Parce que, dans le référentiel, en rotation, le référentiel accéléré ici du disque, il y a une accélération centripète du à la rotation, on doit tenir compte de forces supplémentaires qui permettent d'exprimer ce qui se passe, puisque en absence de forces extérieures, le mouvement n'est pas rectil uniforme. Ces forces s'appellent les forces inerties. On les introduira au chapitre 10 de ce cours. D'accord ? Alors, il y en a deux. Alors, je vais prendre un point qui est ici, par exemple. Hop. Il y a une première force dont vous avez certainement déjà entendu le nom. Exactement, la force centrifuge. Là, voici. F petit c. Il y en a une autre. Cette autre force, c'est la force dite de Coriolis, qui est orthogonal à la trajectoire relative, qui donne lieu à cette trajectoire incurvée. Elle est ici. La somme vectorielle de ces deux forces contraint le mouvement sur cette trajectoire spirale. C'est pas quelque chose que vous devez comprendre pour l'instant. C'est quelque chose que vous devez juste observer. D'accord ? Et on expliquera ça plus tard. Mais on se rend compte que c'est un problème vraiment intéressant. D'accord ? Alors, pour ceux d'entre vous qui mettent les forces, pour ceux

notes

résumé

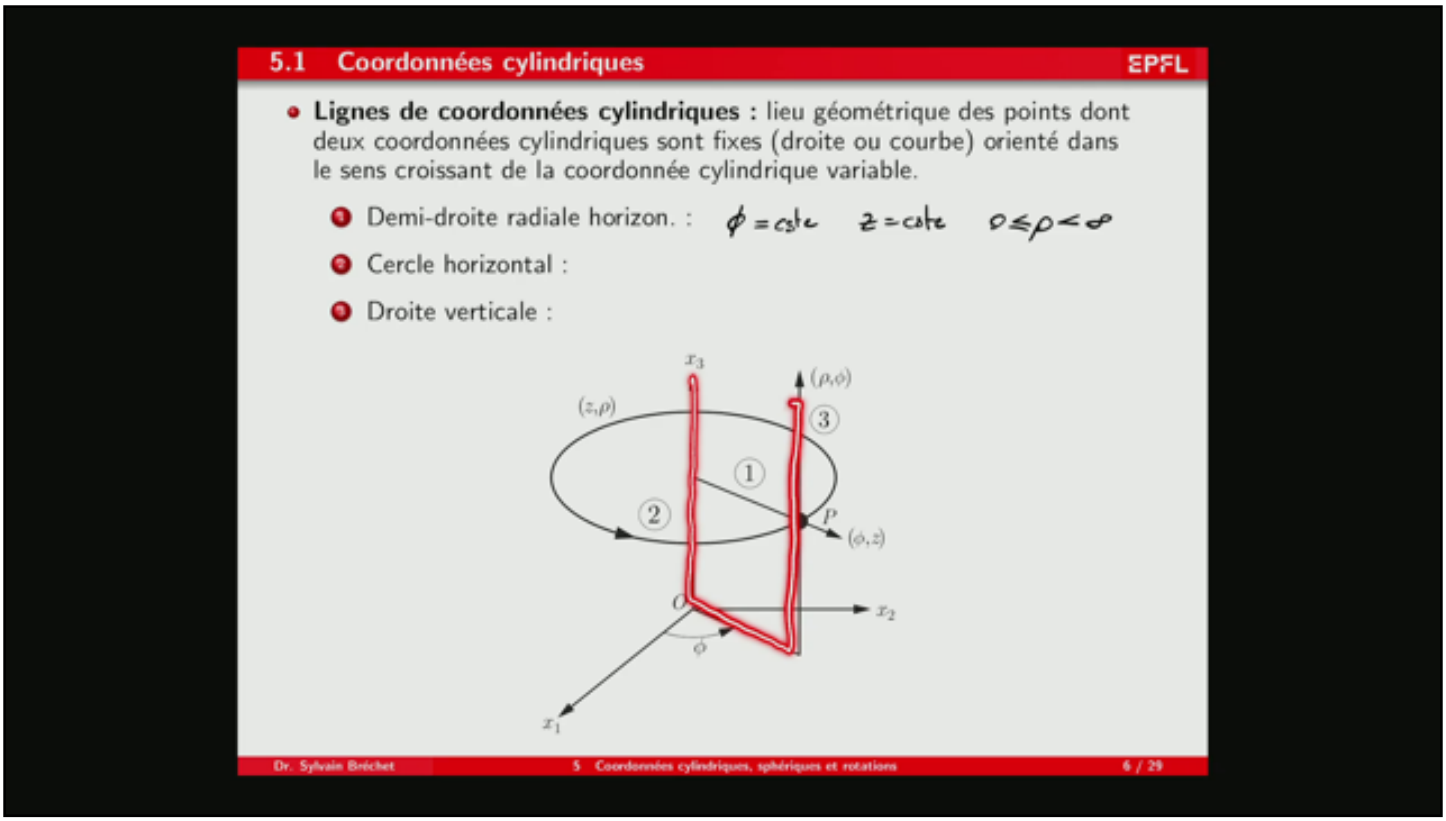
16m 13s



d'entre vous qui mettent des notes sur les images, vous voyez ici que la trajectoire est incurvée vers l'arrière. Donc le mouvement de rotation à droite ne se fait pas dans le même sens qu'à gauche. À droite, le mouvement de rotation se fait dans le sens des aiguilles d'une montre. D'accord ? Donc on a ici un vecteur vitesse angulaire qui va rentrer dans le plan. D'accord ? Donc le sens de rotation, c'est celui-ci. Voilà. Bien.

notes

résumé

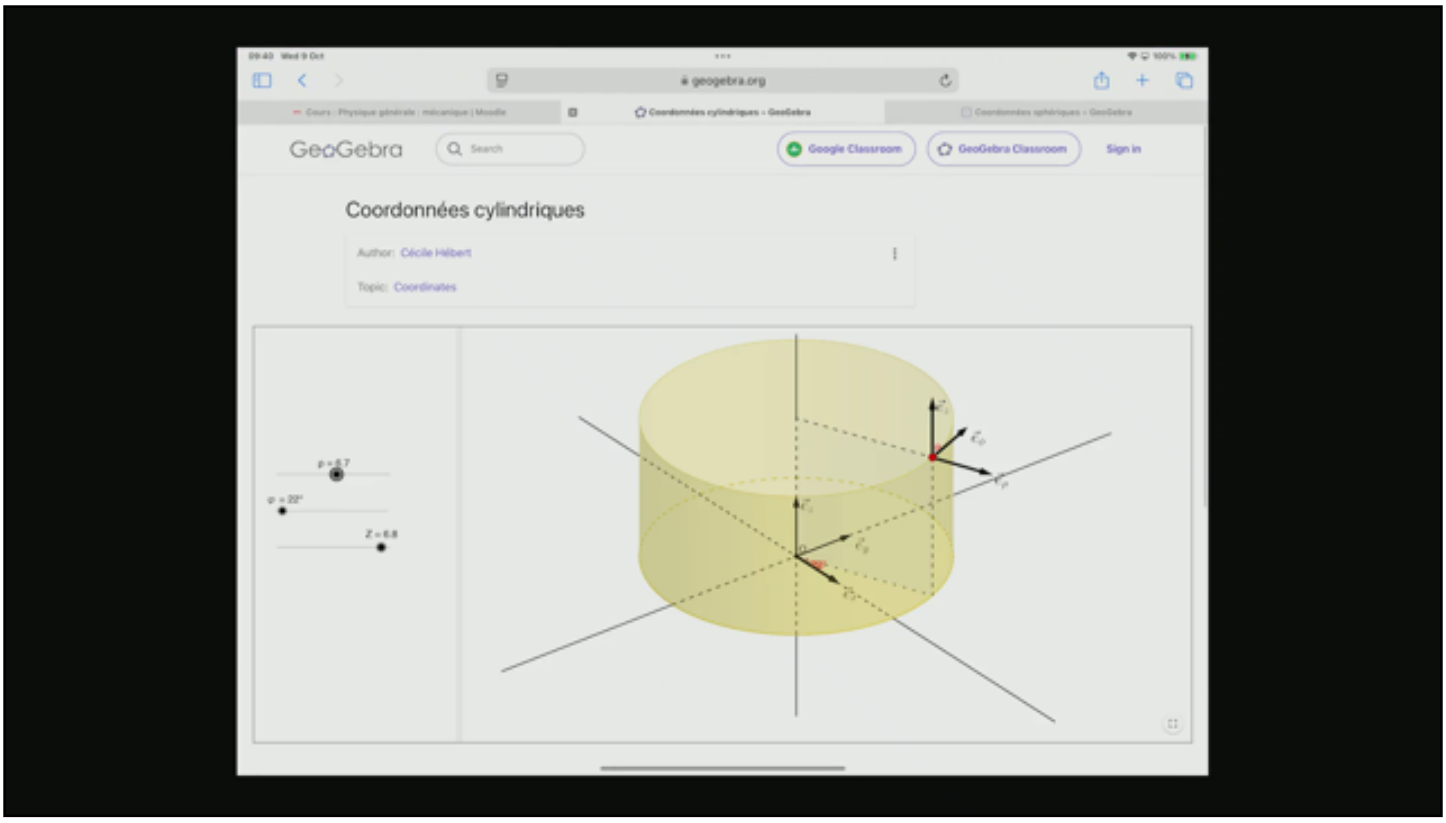


Alors, pourquoi aller plus loin ? Il faut qu'on définisse la notion de ligne de coordonnées. D'accord ? La notion ligne de coordonnées, c'est le lieu géométrique des points pour lesquels deux coordonnées sont maintenues fixes et il y a une coordonnée qui varie. Alors fixons, pour commencer, les deux dernières coordonnées, soit la coordonnée azimutale-fi, langue azimutale dans le plan horizontal, ainsi que la cordonnet verticale Z. D'accord ? Et alors, on aura une coordonnée radiale qui va varier entre zéro et l'infini. D'accord ? Alors, fixons la coordonnée fi. Pour fixer la coordonnée fi, on prend un demi-plan vertical issu de l'axe vertical qui est ici,

notes

résumé

19m 3s

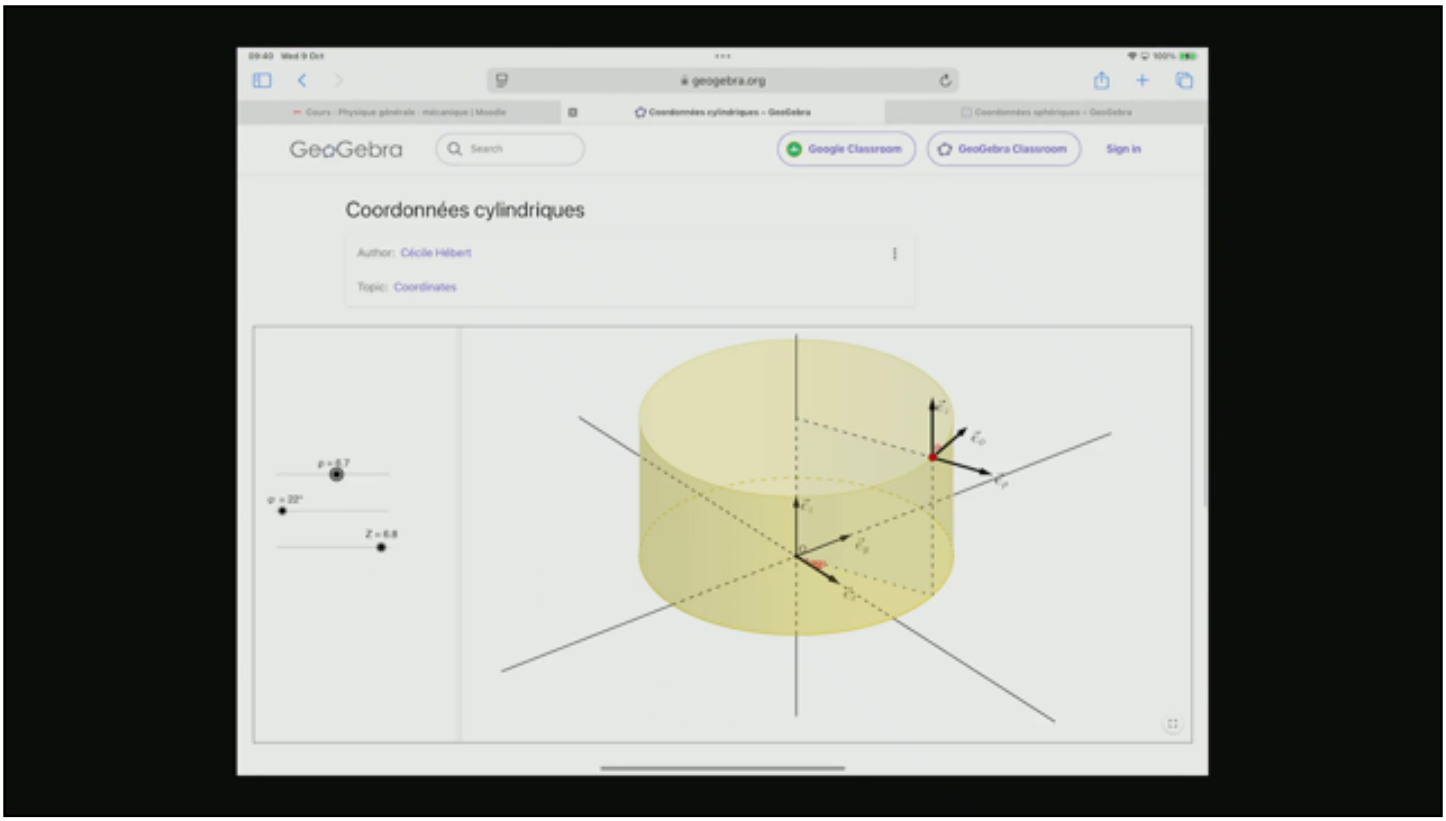


qui passe par le point P. Il est là, le demi-plan vertical. D'accord ? En tout cas, z des constants, qu'est-ce qu'on va faire ? On va fixer... On aura un autre plan qui est ici, qui est orthogonal au premier, d'accord, qui passe par le point P. Et l'intersection entre ces deux plantes, le demi-plan et le plan, va nous définir le segment qui est là. D'accord ? Le long de ce segment, la coordonnée rôme varie, elle est définie positive vers l'extérieur et l'augmente à partir ici, de l'axe vertical. Donc, vous avez une ligne de coordonnée orientée, qui est celle-ci, d'accord ? C'est la demi-droite horizontale radial. Bon. Le deuxième cas de figure, c'est celui pour lequel z est maintenu constant. Rô est aussi maintenu constant. Et c'est notre angle fi qui va varier entre zéro et nepi. D'accord ? Si z est constant, on a un plan horizontal qui passe par le point P. Si rô est constant, on a un cylindre vertical, d'accord, qui passe par le point P. L'intersection entre le cylindre vertical qui passe par le point P et le plan horizontal définit un cercle. Un cercle qui est orienté dans le sens croissant de fi, et ce sens croissant de fi, c'est le sens trigonométrique. C'est la deuxième ligne de coordonnée. Donc, on a la première qui est là, la deuxième qui est ici, d'accord ? Il reste à déterminer la troisième. Pour la troisième, on va fixer les deux premières coordonnées. On prend rô constante. On prendra fi constante, d'accord ? Et si rô et fi sont constants, on va faire varier zèle de moins l'infini à plus l'infini. Quand rô est constant, on a un cylindre vertical de rayon rô, centré sur l'axe OX3. Si fi est constant, on a un demi-plan vertical issu de OX3, le demi-plan vertical qui est ici, l'intersection entre le cylindre et le demi-plan vertical.

notes

résumé

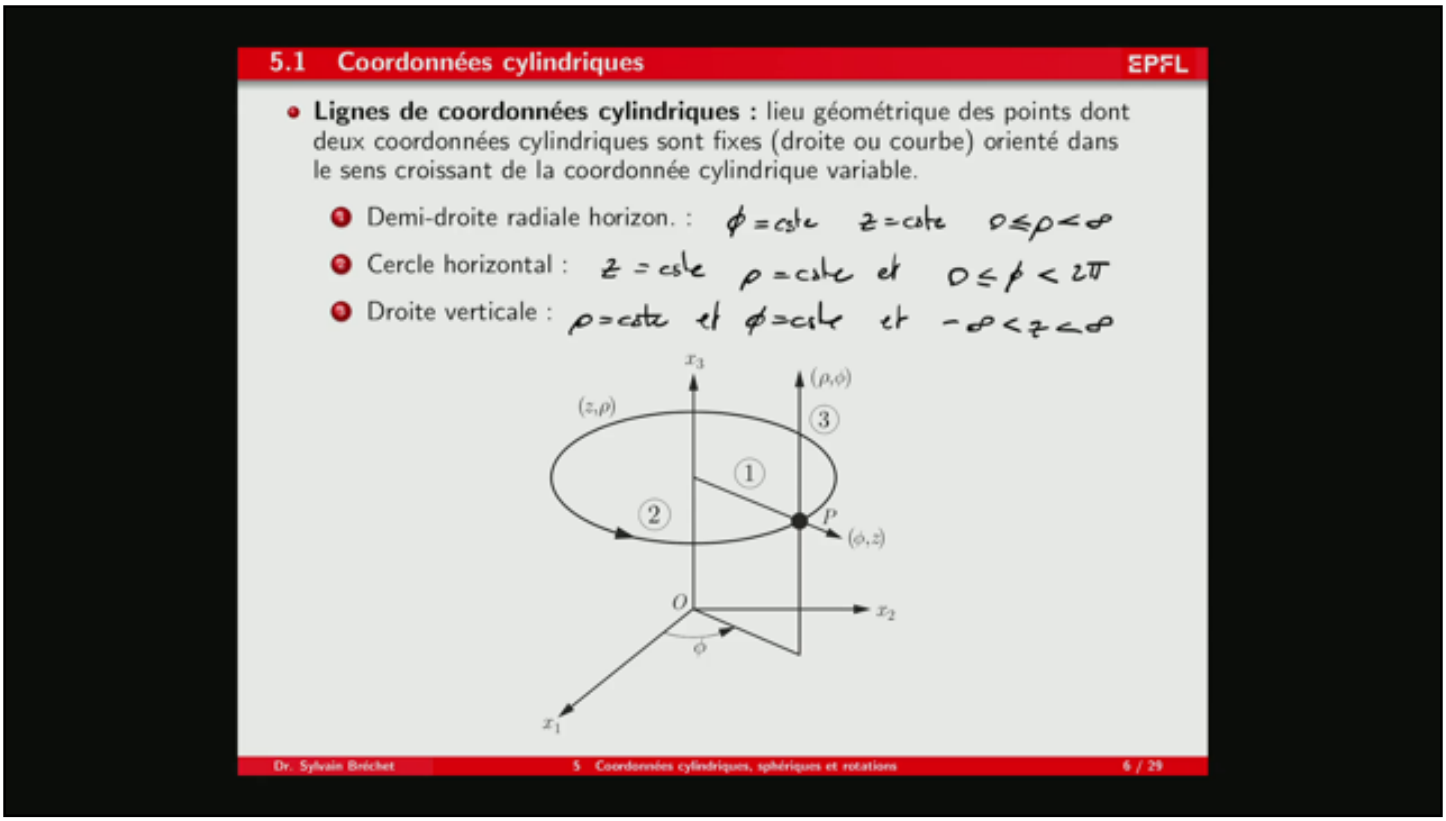
19m 53s



C'est évidemment la droite verticale qui passe par le point P, qui est définie positive vers l'eau. Ça, c'est notre troisième ligne de coordonnée. Donc, un, deux et trois. Alors, maintenant, grâce à ça, on a une structure qui reflète la symétrie cylindrique qu'on veut. On peut donc introduire les repères cylindriques et le repère cylindrique, qui constitue des vecteurs unitaires qui sont tangents à ces lignes de coordonnées. On prend la première ligne de coordonnée, on part du point P et on introduit un vecteur de longueur unité. Ça, c'est le vecteur rô chapeau. On prend la deuxième ligne de coordonnée, le cercle. On part du point P et on introduit un vecteur unitaire tangent au cercle. Ça, c'est le vecteur fi chapeau. D'accord ? Prends la troisième ligne de coordonnée, on introduit un vecteur unitaire le long de cette troisième ligne de coordonnée partant du point Z. C'est le vecteur z chapeau. D'accord ? Ces trois vecteurs forment le repère qui nous intéresse. En fonction du positionnement du point P dans l'espace, le repère automatiquement sa ligne de telle sorte que les vecteurs rô chapeau et fi chapeau soient respectivement radiales et tangentiels et que Z chapeau reste vertical. Alors, si vous voulez jongler un petit peu avec ceci,

notes

résumé

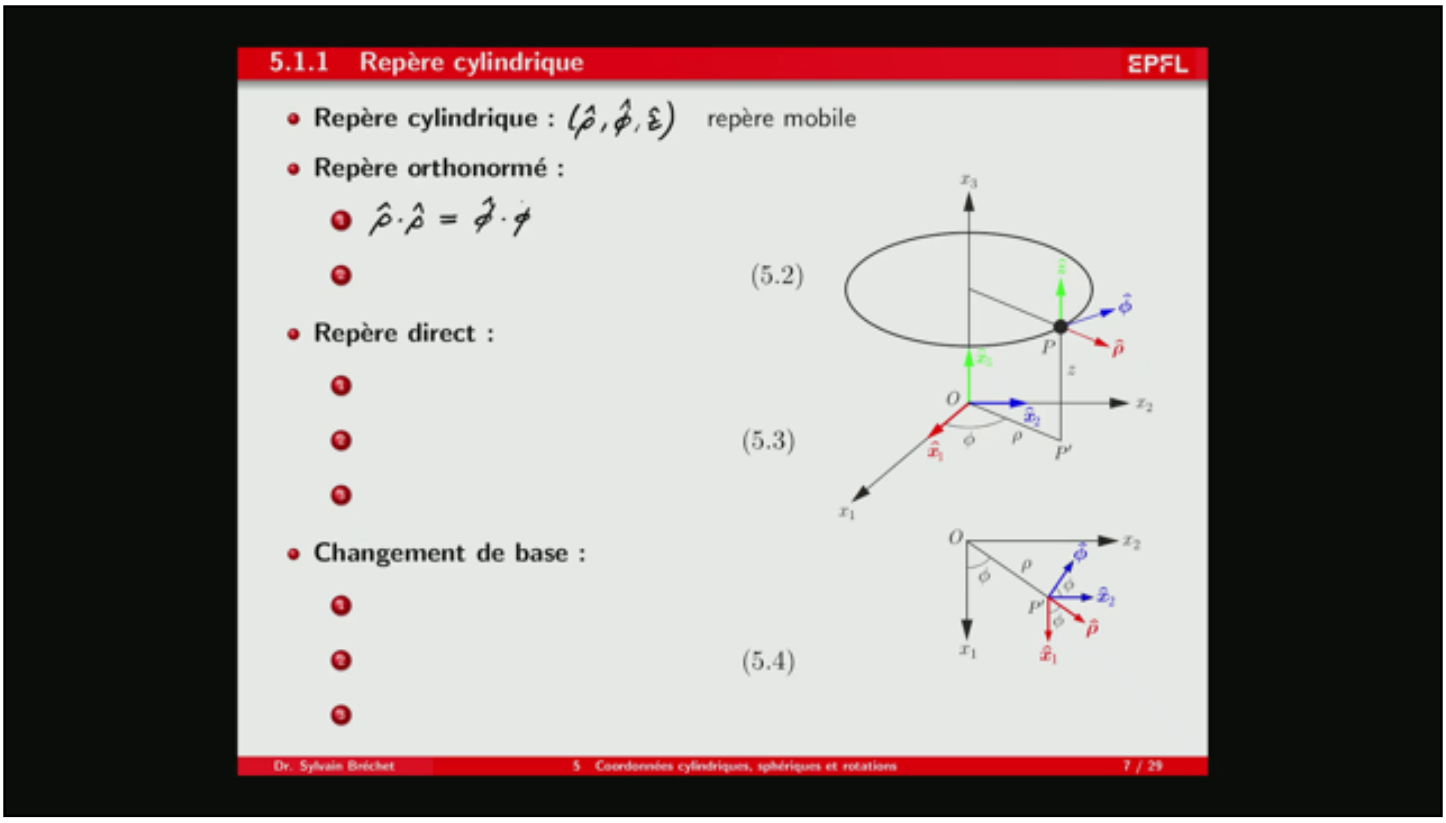


vous pouvez par exemple aller voir une application qui a été développée sur GOGBRA par ma collègue Cécile Desbert. Je vous recommande de jouer avec ceci même en exercice. D'accord ? Et là, prie la notation, qui est souvent de notation usuelle, de noter les vecteurs unitaires avec des lettres E, ERO, EFI, EZ, c'est la même chose que rô chapeau, fi chapeau et Z chapeau. D'accord ? Donc vous avez le repère cartesien qui est fixe au centre, à l'origine, le repère cylindrique qui va tourner avec le point matériel. Donc maintenant, si on fait varier l'angle fi, vous voyez, on peut faire tourner le repère. Si maintenant on change rô, on les carte du centre, mais l'orientation ne change pas. On peut le faire monter et le faire descendre. D'accord ? Là non plus, en orientation, on ne va pas changer. Qu'est-ce qui va donc modifier les vecteurs unitaires, uniquement la rotation, dans le plan horizontal, qui revient à modifier l'angle fi. Et c'est ça, qui va donner lieu à des dérivés temporels de rô chapeau et fi chapeau, de ERO et EFI, qui seront non nuls. D'accord ? Bien.

notes

résumé

23m 17s

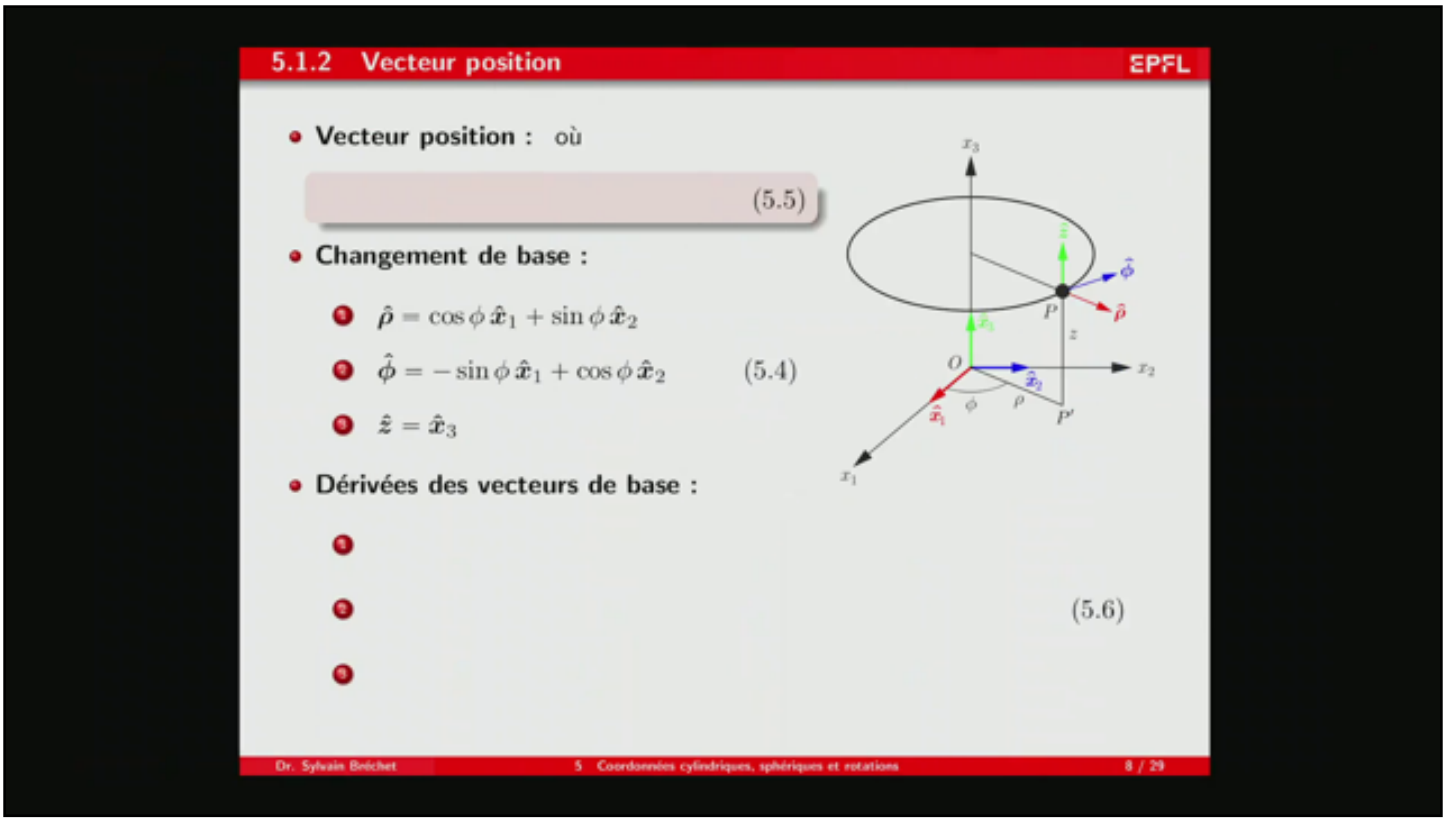


Alors le repère cylindrique, elle le voici. Vous le voyez à l'écran. Vous avez le premier vecteur rô chapeau en rouge, le deuxième fi chapeau en bleu, le troisième z chapeau en vert. D'accord ? Il faut les mentionner dans le bon sens, parce que sinon, ce ne sera plus un repère direct. On va le voir dans quelques instants. Les vecteurs sont des vecteurs unitaires, orthogonaux. On a un repère orthonormé. Donc si on prend le produit scalaire de deux vecteurs unitaires identiques, d'un vecteur unitaire avec lui-même, rô chapeau avec rô chapeau, fi chapeau avec fi chapeau,

notes

résumé

24m 22s

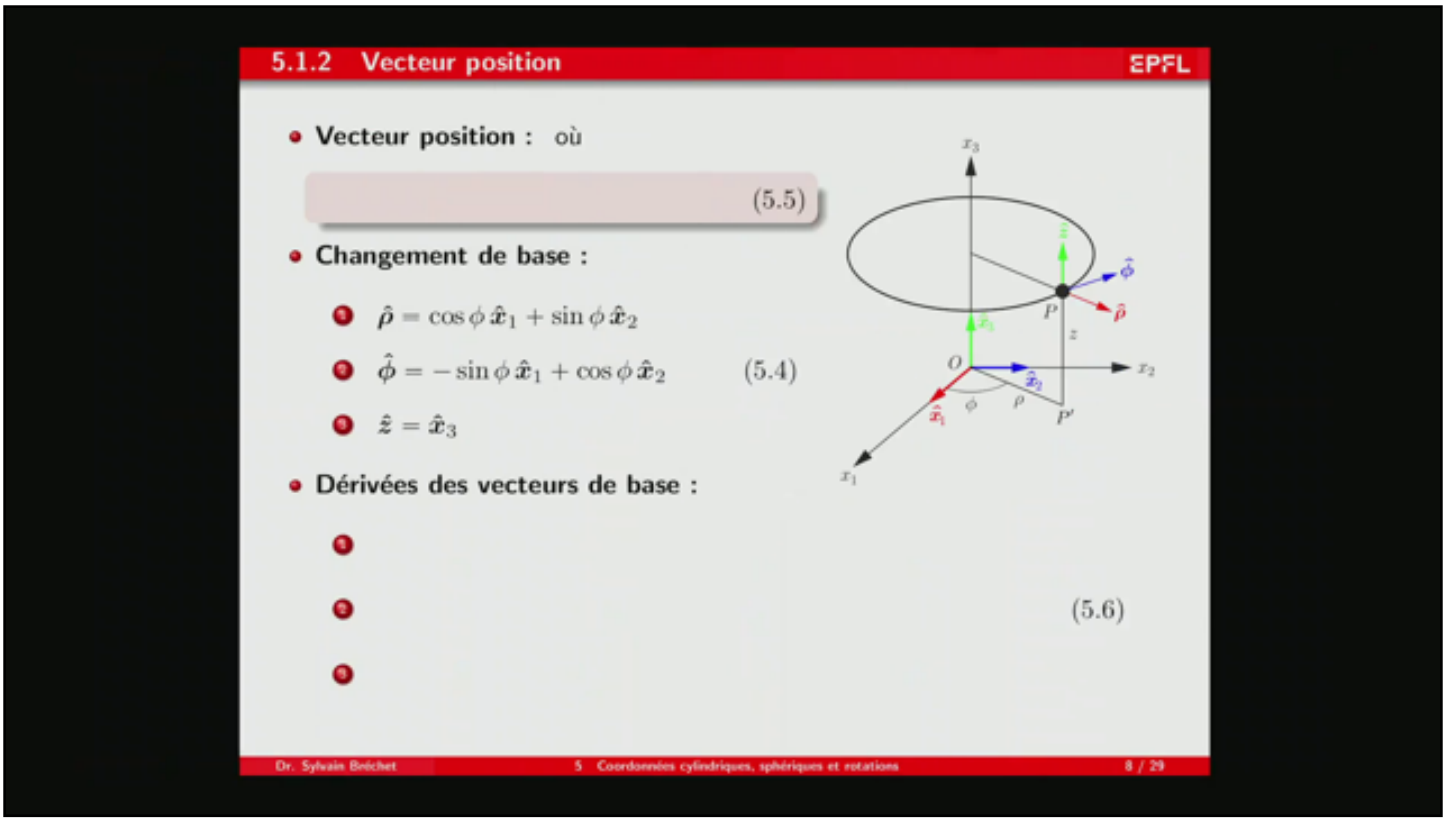


ou z chapeau avec lui-même, on a la norme au carré qui vaut. D'accord ? En revanche, si on prend le produit scalaire d'un vecteur unitaire avec un autre vecteur, par exemple, rô chapeau, avec fi chapeau, alors fi chapeau avec z chapeau, encore z chapeau avec rô chapeau, on a bien sûr zéro, puisque par construction, ces vecteurs sont orthogonaux, leur produit scalaire est nul. Le repère est un repère direct au sens de la règle de la main droite. Alors, on peut prendre l'index de la main droite, on l'oriente selon rô chapeau, on l'oriente le majeur de la main droite selon fi chapeau, puis on voit que le pouce est orienté selon z chapeau. D'accord ? Donc, d'après la définition du produit vectoriel, le produit vecteuriel de rô chapeau avec fi chapeau va nous donner z chapeau. D'accord ? Vous pouvez faire tourner la main pour orienter maintenant l'index selon fi chapeau, le majeur selon z chapeau, et vous allez voir que le pouce est orienté selon rô chapeau. Faites encore un tour avec la même main, et vous avez le produit vectoriel de z chapeau avec rô chapeau, qui donne fi chapeau pour le vérifier rapidement. En réalité, nos vecteurs unitaires satisfont la règle du logo Mercedes. Si on passe le premier en haut, qui est un rô chapeau, le deuxième à droite fi chapeau, le troisième à gauche z chapeau, si on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, le produit d'un vecteur avec le suivant va nous donner celui d'après avec un signe plus dans le sens opposé, celle précédent avec un signe moins. D'accord ? C'est une règle universelle. Ça marche pour les coordonnées cartésiennes, ça marche pour les coordonnées cylindriques, et ça marchera, on va le voir aussi, pour les coordonnées sphériques. Viens maintenant à la partie un peu plus intéressante, c'est le changement de base. On est en train en

notes

résumé

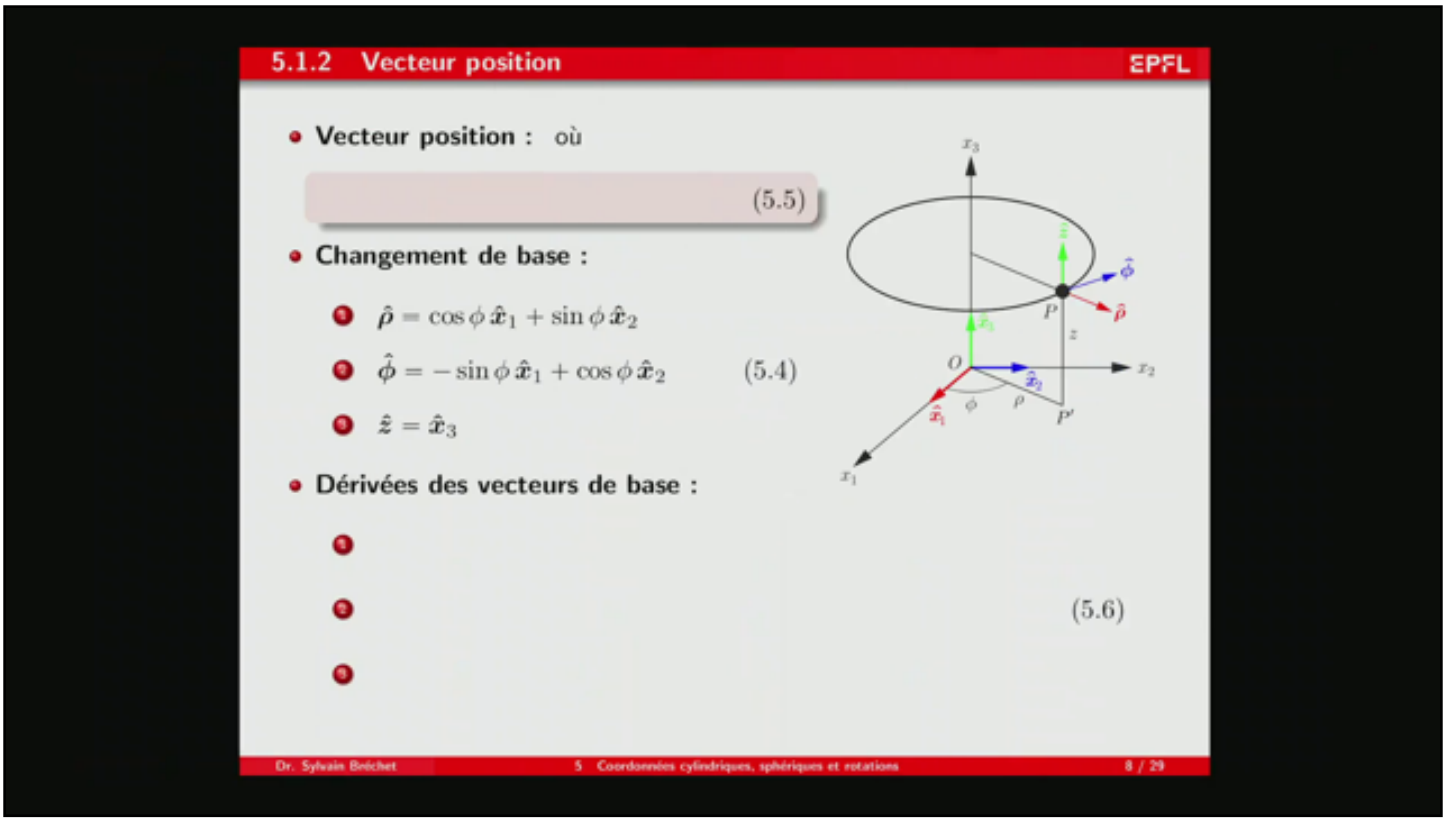
24m 59s



fait de faire de l'algebrainaire. On passe d'une première base qui est la base cartésienne, à une deuxième base qui est la base cylindrique. D'accord ? Alors, il y a une chose qui est très simple. Le vecteur z chapeau, c'est quoi ? C'est le vecteur x3 chapeau, pourquoi ? Parce que ce sont deux vecteurs verticaux et unitaires. Ce sont les mêmes. D'accord ? En revanche, on va maintenant devoir exprimer le vecteur ro chapeau et le vecteur fi chapeau en termes des vecteurs unitaires de la base cartésienne. Comment faire ? Alors, il y a une méthode très simple. C'est de la géométrie. On va prendre ce repère, et on l'amène sur le plan horizontal, sans changer l'orientation des vecteurs. Ce qui veut dire que maintenant, les deux vecteurs qui sont ici, dans le plan horizontal, ro chapeau et fi chapeau, on les fait partir du point P prime. On peut aussi prendre le repère cartésien et sans changer l'orientation, déplacer le repère pour qu'au lieu qui soit issu du point O, il soit issu du point P prime. D'accord ? On se retrouve avec X1 chapeau, qui est parallèle à l'axe des abscesse, X2 chapeau, qui est parallèle à l'axe des ordonnées. Et maintenant, on va simplement, en faisant des projections, exprimer les nouveaux repères en termes des anciens. D'accord ? Donc, prenons le vecteur ro chapeau. On a un angle fi ici. Donc, si on projette son X1 chapeau, on va projeter sur le cathette adjacent. Ce sera le cossif de fi. Et puis, on va faire un point P prime, pour le chapeau, le cossinus de l'angle fi, x1 chapeau. Ici, on projette selon X2 chapeau, ici ou si on veut de manière équivalente, là. On va projeter sur le cathette opposée à l'angle fi. On va donc se retrouver avec le sinus de l'angle fi, x2 chapeau. Ok ? Faisons la même chose pour

notes

résumé



le vecteur unitaire fi chapeau, qui est ici. C'est la projection selon X2 chapeau, qui va se faire sur le cathette adjacent à l'angle fi. On aura donc, plus de cossinus de fi, x2 chapeau. En revanche, si on projette selon X1 chapeau, on va d'abord projeter ici. Je vais prendre le laser. Voilà. On va projeter ici. Ok ? Et puis ensuite, il faut faire attention, parce que cette projection nous donne un vecteur qui orientait vers le haut. Nous, on veut un vecteur qui orientait vers le bas. Donc il faut encore multiplier par moins un. On va se retrouver avec moins le sinus de fi, x1 chapeau. Ce d'entre vous qui sont perspicaces, vous verrez que si vous écrivez une application linéaire qui prend un vecteur de départ, dont les composantes sont les vecteurs unitaires X1 chapeau, X2 chapeau, X3 chapeau, qui l'envoie sur un vecteur d'arrivée, un vecteur image, dont les composantes sont re chapeau, fi chapeau et z chapeau. Ceci est décrit par une motrice de rotation qui fait intervenir l'angle moins fi. D'accord ? On fait une rotation dans le plan horizontal. Ok ? Voilà. Alors, maintenant qu'on a fait tout ceci,

notes

résumé

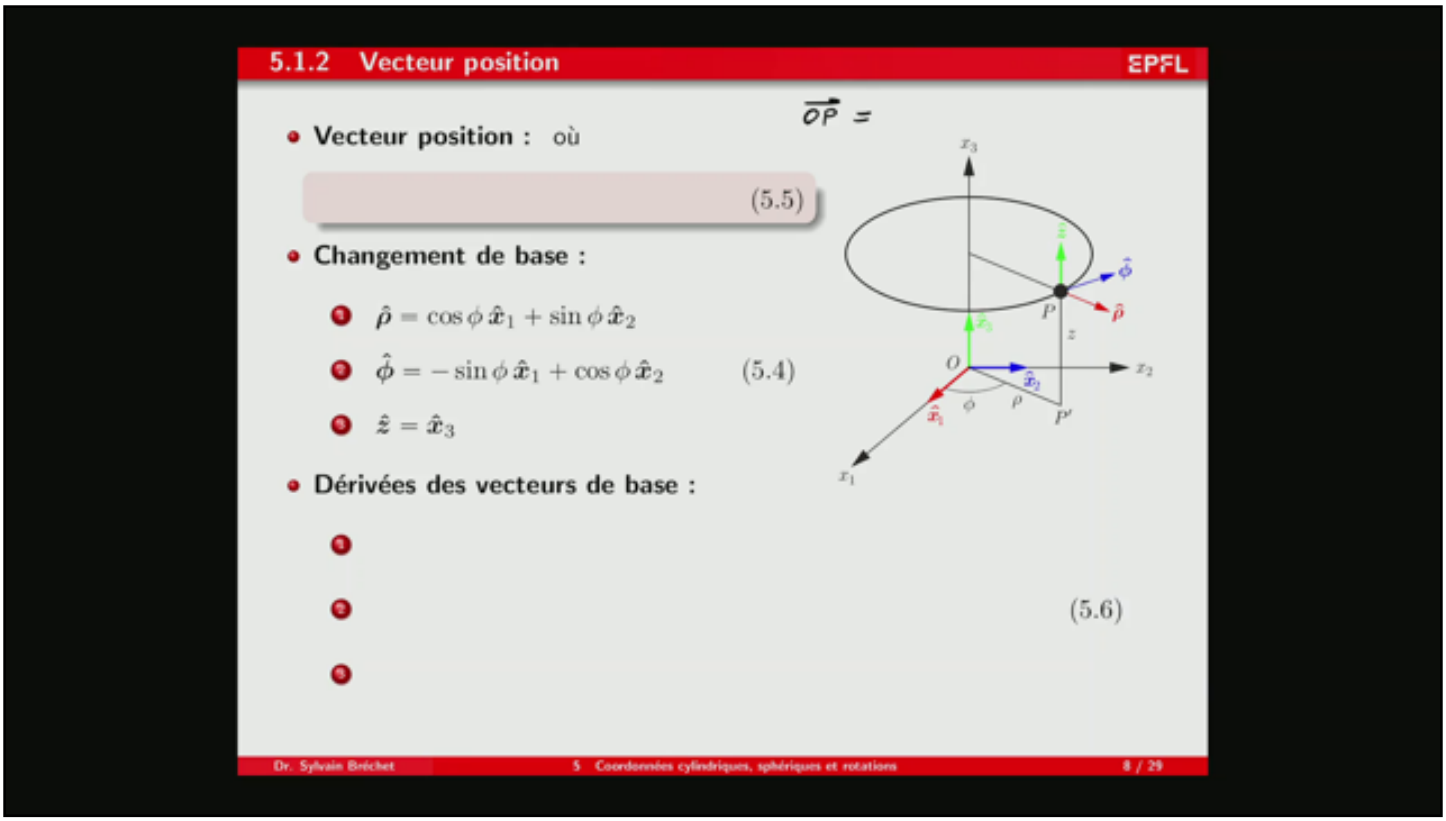


on va définir le vecteur position. Le vecteur position du point P, c'est le vecteur op, et dans la symétrie des coordonnées cartesiennes que vous voyez ici, sur le dessin, pour aller de haut à P, qu'est-ce qu'on va faire ? On va aller de haut à P prime,

notes

résumé

30m 2s

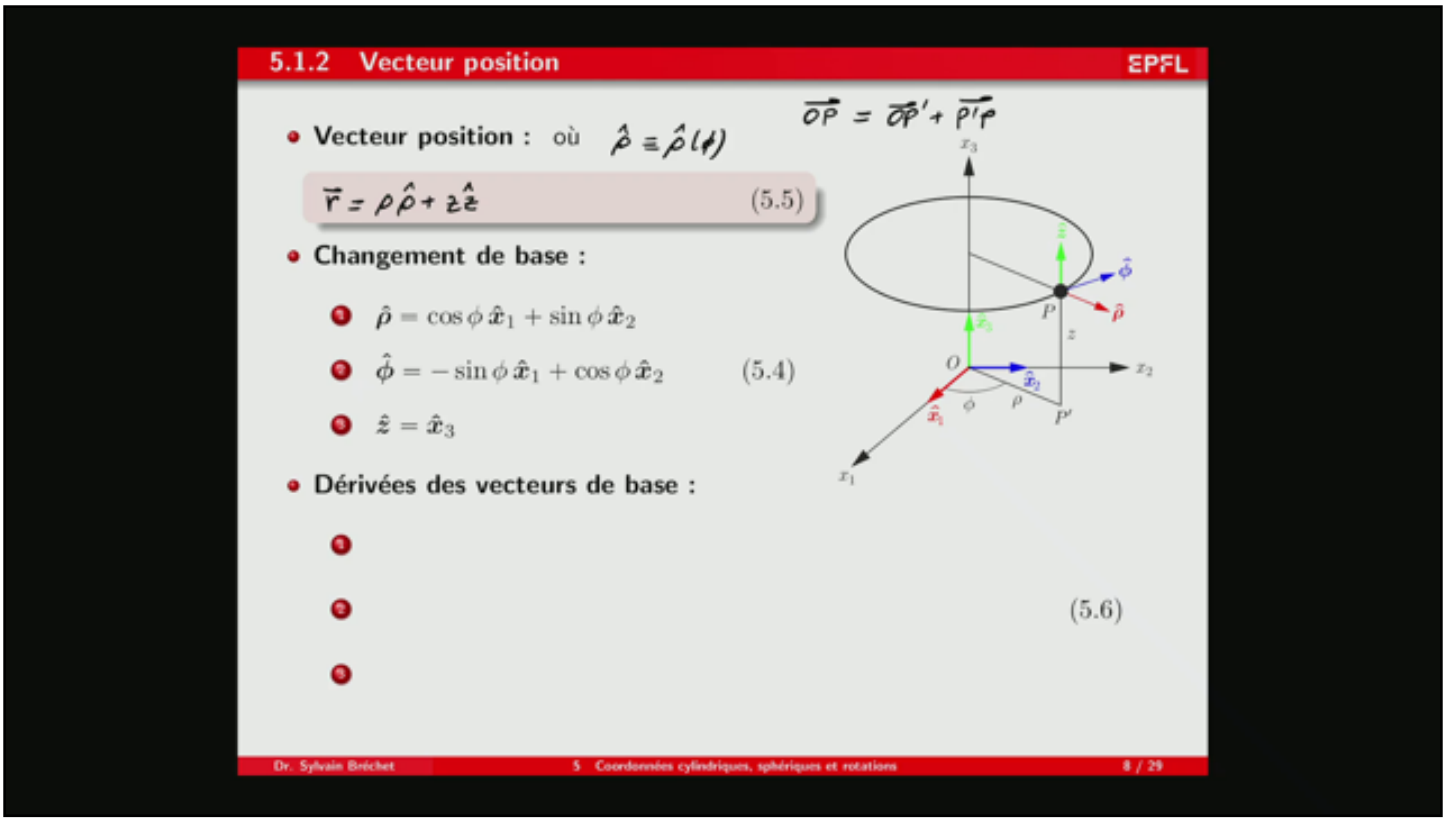


et ensuite de P prime jusqu'à P. Alors, on débranche, on rebranche, c'est probablement un faux contact. Ah ! Bon, ça va revenir. Alors, on re-debranche tout, on récaye. Vous voyez ? Encore une fois,

notes

résumé

30m 20s

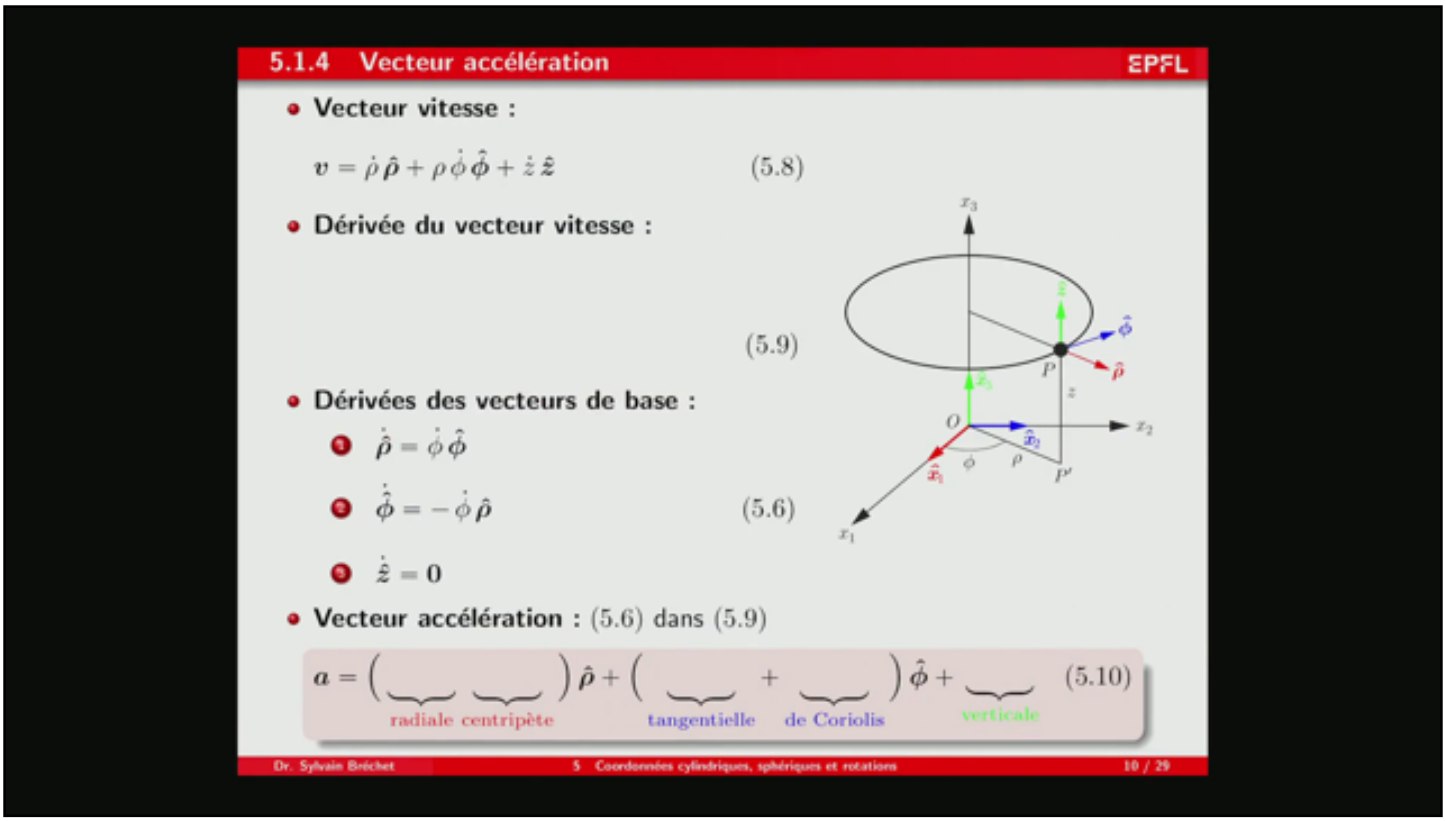


c'est Bern qui nous a livrés de matériel. Il faut être un peu patient, mais la patience paye. D'accord ? Donc le vecteur op, c'est la somme du vecteur op prime et du vecteur P prime P. Ok ? Alors, le vecteur position op, c'est le vecteur R. Le vecteur op prime, il a comme norme la coordonnée radiale Rho. D'accord ? Donc c'est Rho. Fois le vecteur unitaire, qui est tangent ici à la ligne de coordonnée, c'est le vecteur Rho-Chapo. Ok ? Donc c'est Rho-Foi-Rho-Chapo. Et ensuite, pour aller de P prime AP, eh bien, la norme de P prime P, c'est la coordonnée verticale Z, qu'on multiplie par le vecteur unitaire vertical Z-Chapo. Alors, ça, ça devrait déranger certains d'entre vous. Qu'est-ce qui sent bizarre dans ces conditions ? Qu'est-ce qui sent bizarre dans cette écriture du vecteur position ? Oui ? Il manque fi, exactement. Alors, il semble manquer fi, c'est correct. Alors, justement, où se cache fi ? Regardez bien. Oui ? Exactement. Parce que si je prends le repère, je le fais tourner. D'accord ? Vous voyez que le vecteur Rho, il change d'orientation au cours du temps. Ça veut dire qu'il va dépendre de l'angle fi, que j'ai. Ok ? En fait, ici, le vecteur Rho-Chapo est une fonction de la coordonnée fi, donc tout va bien. On a bien une dépendance en Rho, en fi et en Z-N. D'accord ? On a notre formule de changement de base. Qu'est-ce qu'on veut faire quand on est là ? De la dynamique, déjà de la cinématique.

notes

résumé

30m 44s

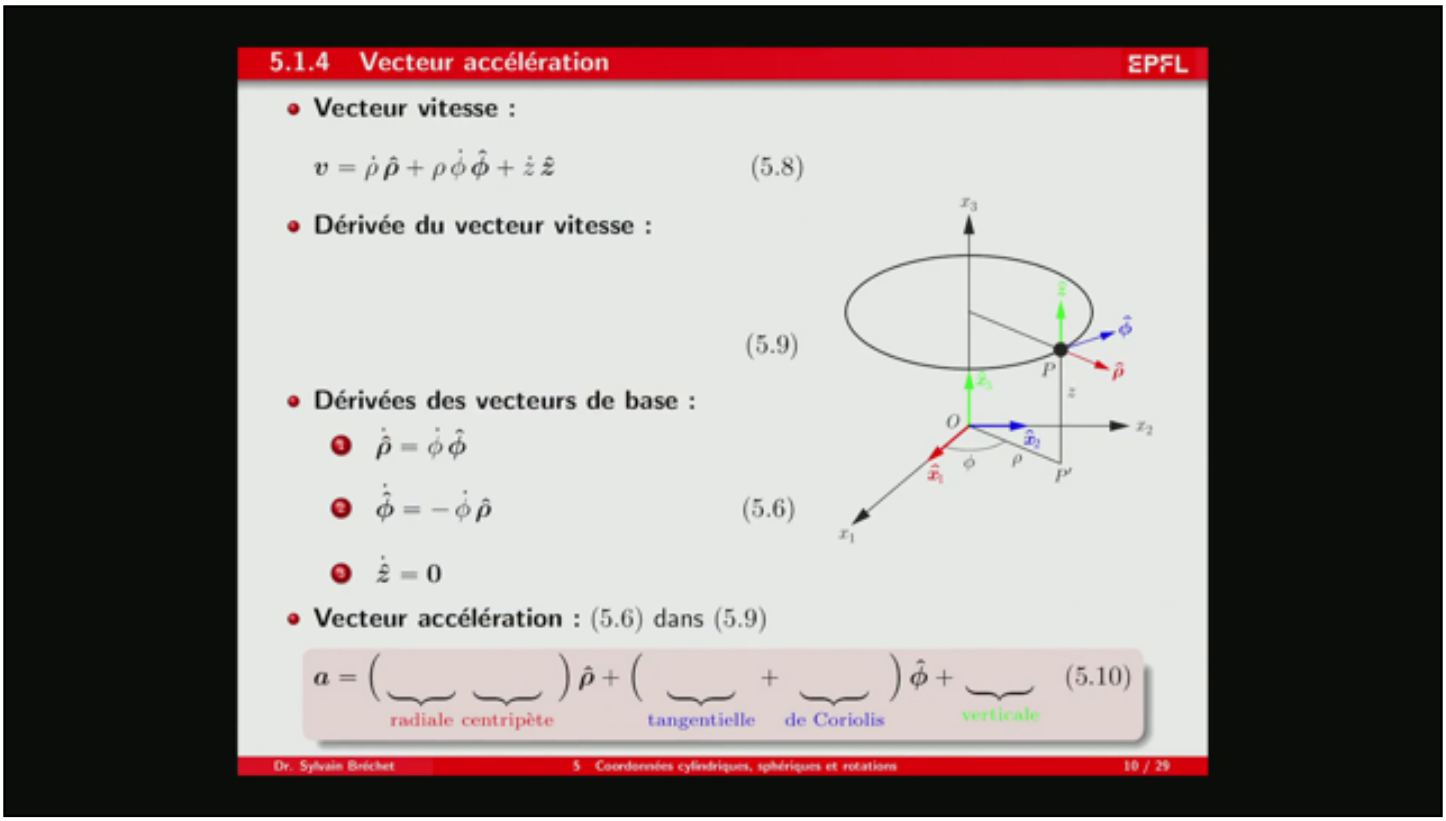


Donc, on aimerait trouver le vecteur vitesse et puis le vecteur accélération. Comment est-ce qu'on va trouver le vecteur vitesse en dérivant par rapport au temps le vecteur position ? Pour dériver le vecteur position au cours du temps, on devra évidemment dériver les coordonnées. Ça, vous auriez pu le deviner facilement, mais on doit aussi dériver les vecteurs illitaires. Et c'est ce qu'on va maintenant faire ensemble. D'accord ? On va faire les calculs, puis vous verrez plus tard, tout à la fin de ce cours, on aura une méthode plus élégante pour faire ces mêmes calculs rapidement. Mais il est important de comprendre comment les calculs sont structurés. Donc, on a besoin d'un petit peu d'huile de coude, et on a besoin de calculer un peu. Donc, calculons la dérivée temporelle du vecteur Rochapo. Bon. On se lance naïvement. On va prendre la structure de Rochapo. Qu'est-ce qu'on a ? Des fonctions trigonométriques de l'anglophie. L'anglophie qui est une fonction du temps, multiplié par des vecteurs unitaires qui, eux, ne dépendent pas du temps, qui sont constants. Donc, il faut dériver par rapport au temps uniquement les fonctions trigonométriques. Mais attention, c'est une dérivée de composition de fonctions. On a la fonction trigonométrique de l'angle, et on a l'angle qui est une fonction du temps. On a la dérivée externe de la fonction trigonométrique par rapport à l'angle, la dérivée interne de l'angle par rapport au temps, qui est la vitesse angulaire. On va donc mettre en évidence la dérivée interne, qui est filipoint. Il nous reste alors à dériver les fonctions trigonométriques par rapport à l'angle. Alors, dérivons le cossinus. On a moins le sinus de l'anglophie, multiplié par X1 chapeau. Ensuite, on aura la dérivée du sinus, qui est le cossinus, multiplié par X2 chapeau. Et si vous regardez les relations qu'on a établies à la ligne, ou dans les équations, dans le système d'équation, vous

notes

résumé

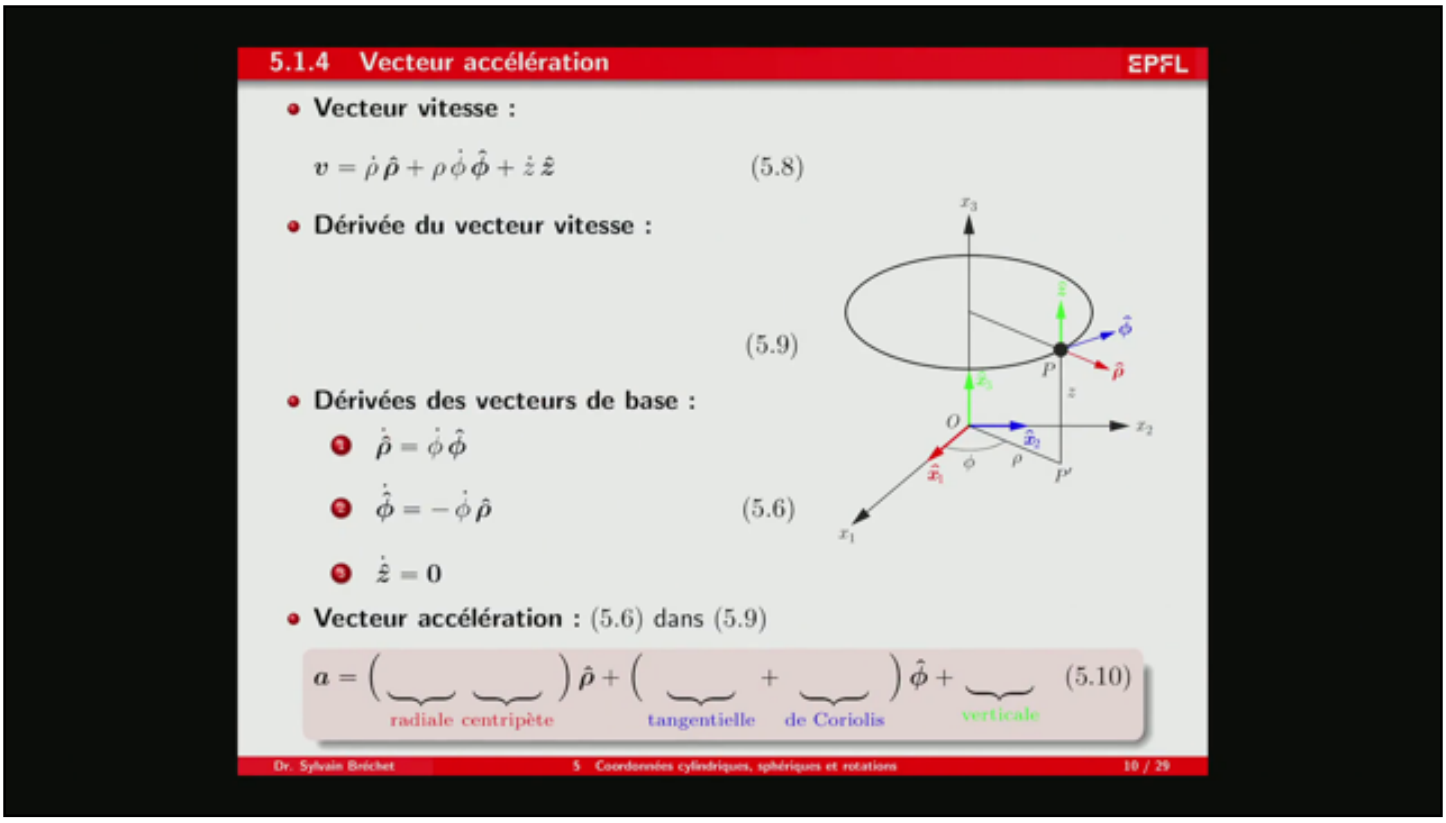
32m 25s



voyez que les termes entre parenthèses correspondent justement à fil chapeau. Donc, c'est filipoint fois fil chapeau. On discutera du sens physique de ceci, ou du sens géométrique dans quelques instants. Pardon ? Alors, le filipoint, il vient du fait qu'on a des fonctions trigonométriques, le cossinus, celsinus, qui sont des fonctions des angles. Et les angles eux-mêmes sont une fonction du temps. Donc, on a une composition de fonctions avec une fonction externe qui est la fonction trigonométrique, une fonction interne qui est l'angle. Et on va prendre les dérivés par rapport à l'interne. D'accord ? Calculons maintenant la dérivée temporelle de fil chapeau, fil chapeau point. On a aussi une dérivée interne qui est filipoint. Pour des raisons de structure, on va directement mettre en évidence un signe moins. Alors, maintenant, la dérivée externe du cinus de fil par rapport à fil, ça va être le cossinus de fil. Donc, on a le cossinus de fil x1 chapeau et la dérivée temporelle du cossinus avec le signe moins. Donc, de moins le cossinus par rapport à l'angle, c'est le csinus. On a le moins en évidence. Donc, on a plus le csinus de fil x2 chapeau et ceci, c'est cela. C'est re chapeau. Donc, on a moins fil point x2 chapeau. Et puis, finalement, le calcul, le plus simple, la dérivée temporelle de z chapeau, c'est quoi ? C'est zéro, très juste. Pourquoi ? Parce que le vecteur unitaire est vertical. C'est le pouce. Je peux monter, descendre, tourner. Il reste vertical, il a une longueur unité, il ne change pas au cours du temps. Comment interpréter géométriquement et physiquement les résultats obtenus ? La première constatation qui est intéressante, c'est que la dérivée temporelle d'un vecteur unitaire a une dimension physique. C'est des secondes moins un. La deuxième, c'est que la dérivée temporelle d'un vecteur unitaire est orthogonal au vecteur unitaire. D'accord ? Vous avez dérivée temporelle

notes

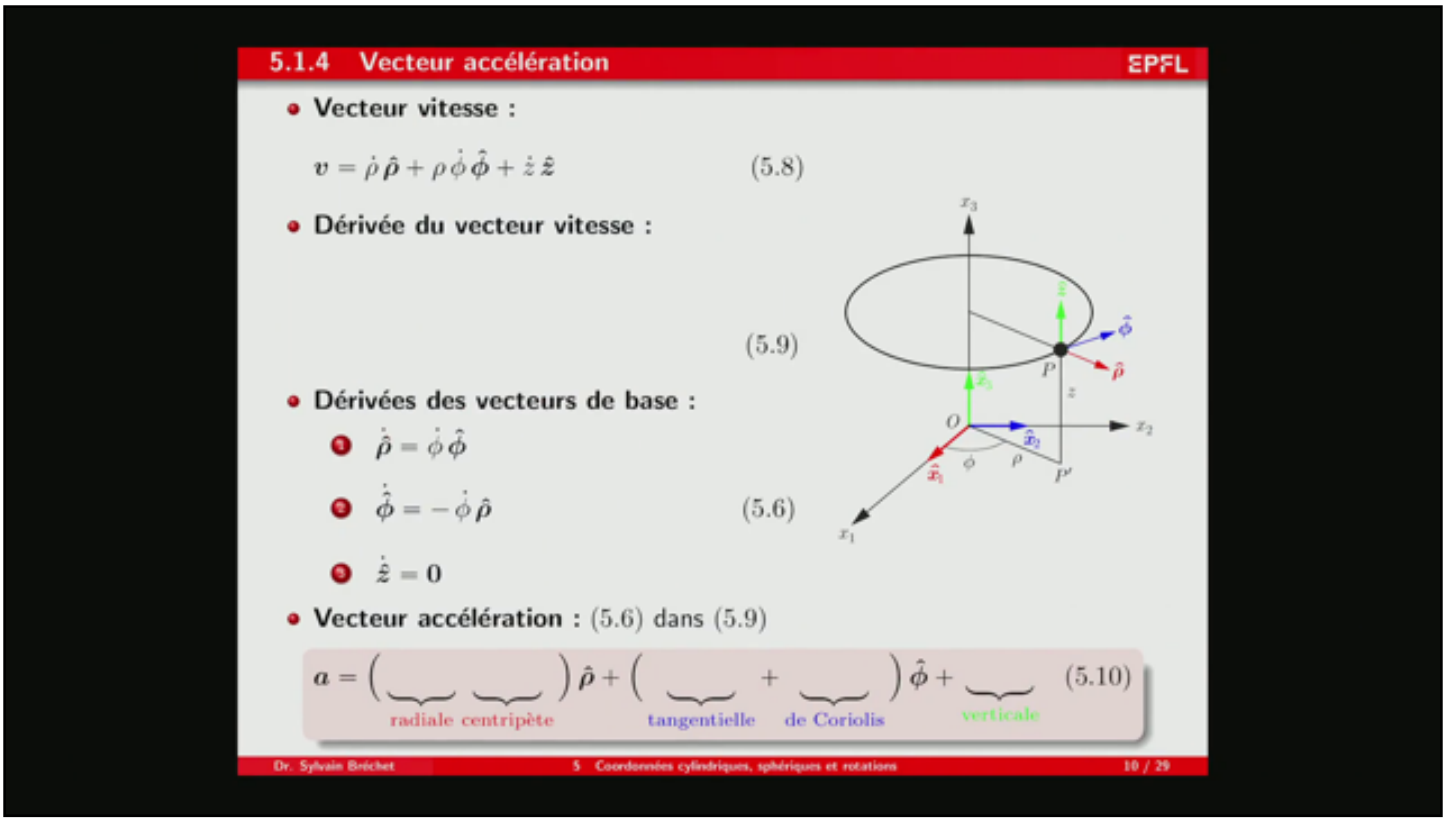
résumé



de ro chapeau selon fil chapeau. De fil chapeau selon ro chapeau. D'accord ? Pourquoi ? Parce que si on avait une composante de la dérivée temporelle d'un vecteur unitaire par rapport à lui-même, ça voudrait dire que la norme du vecteur unitaire change, ce qu'il ne peut pas faire puisqu'il est par définition unitaire. D'accord ? Ensuite, pour aller de ro vers fil, on va tourner en vue d'avion dans le sens trigonométrique. D'accord ? C'est le sens dans lequel l'angle fil augmente. Et donc, comme on a une dérivée temporelle, on a une vitesse angulaire qui va apparaître, c'est fil point fois fil chapeau. En revanche, si on va de fil chapeau vers ro chapeau, on tourne dans le sens d'éguis de montre, dans le sens où l'angle fil décroie, donc on va avoir un moins fil point foire au chapeau. D'accord ? Voilà le sens physique de ce qui se cache là-derrière. Alors maintenant, qu'on a compris ceci, on va d'un coup de cuir à peau, incapable de déterminer la structure du vecteur vitesse. D'accord ? Le vecteur vitesse en coordonnée cylindrique, on va l'obtenir en dérivant par rapport au temps le vecteur position. Rappelez-vous ce qu'on a dit durant la première semaine. On a une règle de calcul, lorsqu'on a le produit de deux fonctions, une fonction scalère, une fonction vectorielle, comprend la dérivée temporelle de ce produit. C'est la dérivée temporelle de la fonction scalère, faut la fonction vectorielle, plus la fonction scalère, faut la dérivée temporelle de la fonction vectorielle. Ce sera donc pour ro fois ro chapeau, ce sera ro point, la dérivée de la composante, fois ro chapeau le vecteur unitaire, plus ro la composante, fois ro chapeau point, la dérivée temporelle du vecteur unitaire. On fait pareil pour z fois z chapeau, on a z point fois z chapeau, plus z fois z chapeau point. Ces termes-là, encore donnés cartesiennes, ils

notes

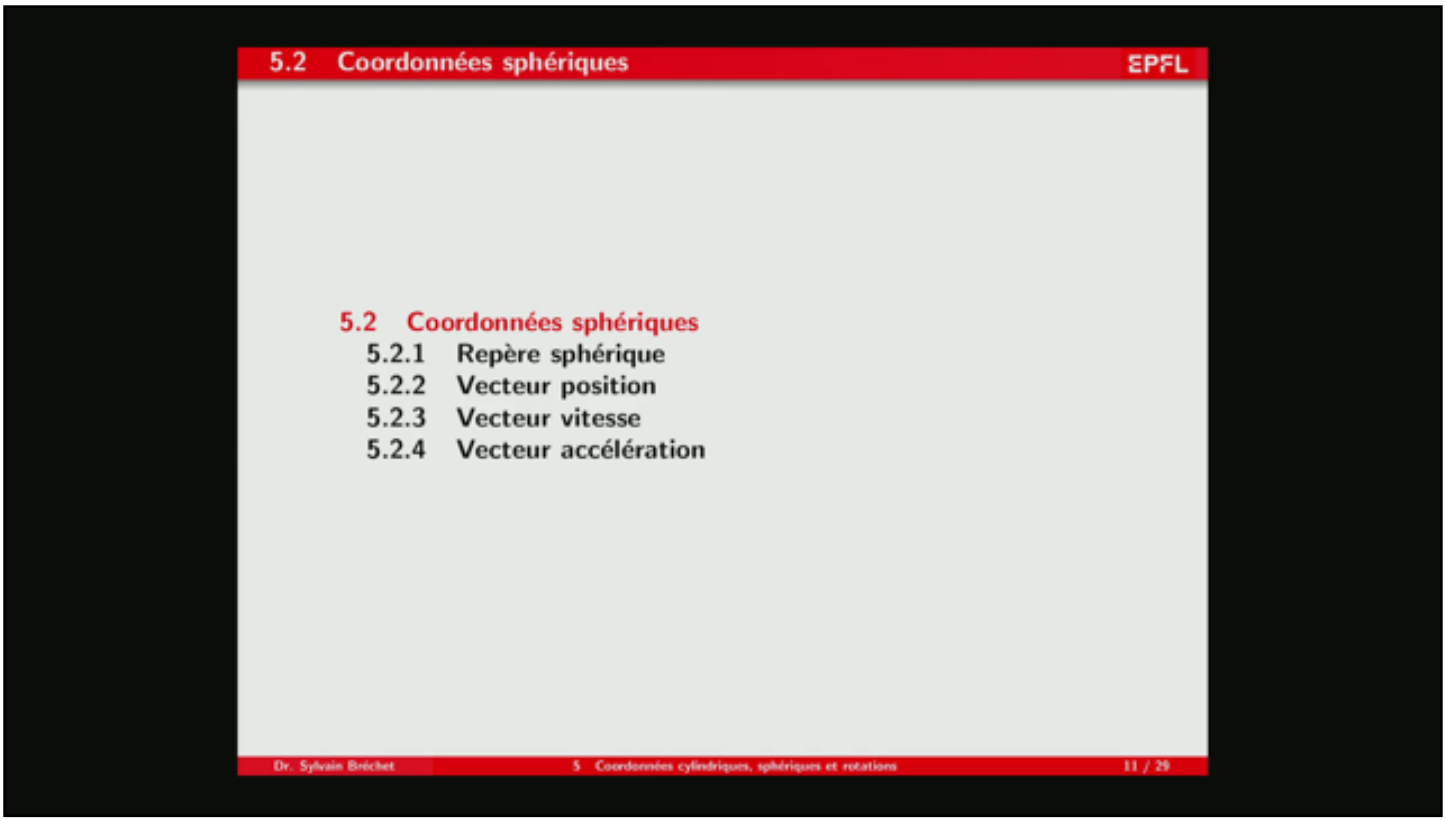
résumé



auraient été nuls. D'accord ? Ici, pas forcément. Enfin, le deuxième lait par la force des choses, mais pas le premier. ro chapeau point c'est phi point phi chapeau. Alors regardez ce qu'on obtient. On a ro point fois ro chapeau, plus ro phi point fois phi chapeau, plus z point fois z chapeau. Cette formule devra figurer dans le formulaire. Vous recevrez un formulaire allégé qui sera même présent sur l'énoncé de l'examen. Sur ce formulaire, vous aurez cette formule. Elle est essentielle. D'accord ? Qu'est-ce qu'elle signifie concrètement ? On a décrit le vecteur vitesse avec une symétrie cylindrique. Donc, si on a un mouvement radial dans un plan horizontal par rapport à l'axe de symétrie d'accord ? Eh bien la vitesse, ça va être quoi ? La dérivé temporelle de la coordonnée fois le vecteur unitaire. Comme pour un mouvement rectiline. C'est la même idée. C'est rectiline, c'est selon la trajectoire radial. Si maintenant on a un mouvement circulaire le long du cercle qui est ici. D'accord ? La vitesse, c'est quoi ? C'est une grandeur qui est tangente au cercle. Le vecteur unitaire, tangente au cercle, c'est le vecteur fichapo. La composante de la vitesse, c'est la vitesse calère qui est le produit du rayon, fois la vitesse angulaire. Le rayon, c'est rô. La vitesse angulaire, c'est la dérivé temporelle de l'angle qui varie dans le plan horizontal, c'est fipoin. Donc on a rô fipoin, fois fichapo. Et selon l'axe vertical, c'est comme encore donné cartesien, c'est la même chose, c'est la dérivé temporelle de la coordonnée z.foiset-chapo. D'accord ? Ça, ça va encore. Passons maintenant au calcul

notes

résumé

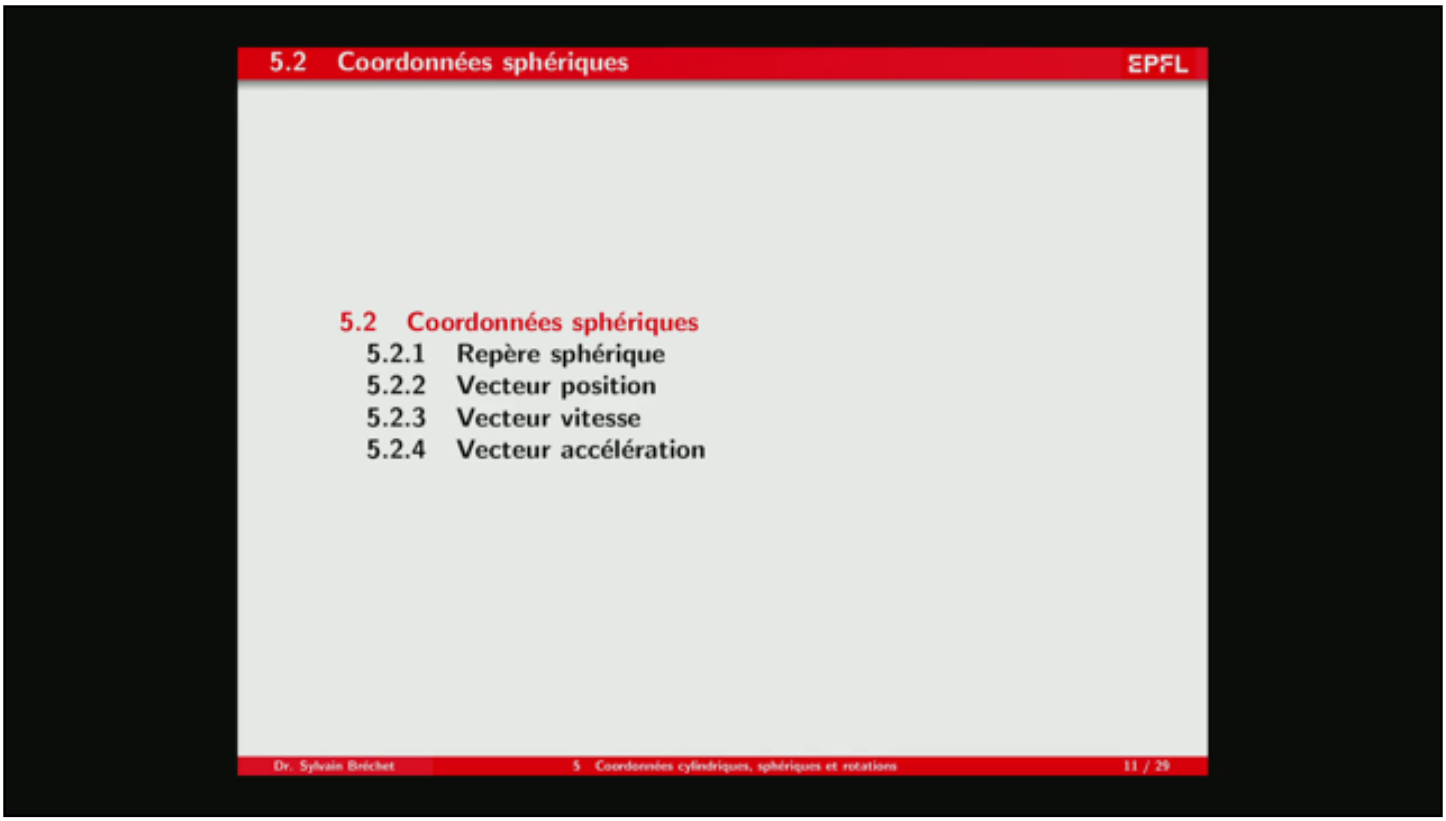


de l'accélération. Pour trouver l'accélération, il faudra dériver par rapport au temps la vitesse. Alors faisons-le. Donc, on veut calculer v. Très bien. On va donc dériver par rapport au temps les trois termes qui sont ici, en dérivant les composantes et les vecteurs unitaires. La dérivé de rô. C'est rô. Foiset-chapo. On a ensuite rô. Foiset-temporelle de rô. Qui est rô. Ensuite, on va dériver par rapport au temps la deuxième composante qui est le produit de rô fipoin. Donc on dérive rô. On a rô. On dérive fipoin. On a fipoin. D'accord ? Et tout ceci multiplie fichapo. Attention. Faut pas oublier de dériver fichapo aussi. Donc on aura rô. Fipoin. Foiset-chapo. Et puis il va nous rester la dérivé temporelle du troisième terme. On dérive la coordonnée. On aura z. Foiset-chapo. On ajoute à ceci z. Foiset-temporelle du vecteur unitaire qui est z. Foiset-chapo. Le reste, c'est des légos. Et les légos proviennent des dérivés temporelles des vecteurs unitaires qu'on va injecter la temps. D'accord ? Pour écrire différemment rô. Fichapo. Et z. Qui pour le coup, dernier donc z. Et nul. Si on recroupe tous les termes, on va se rendre compte qu'on a deux termes qui vont comme rô. Et on va se rendre compte d'un manière générale qui multiplie rô. Qui multiplie fichapo. Et qui multiplie z. Alors pour z. C'est très simple. z. Foiset-chapo. D'accord ? Et puis il y a d'autres termes. Deux termes selon rô. On a rô. Et on a moins rô. Foiset-fichapo. Et puis selon fichapo. Et on a moins rô. Fichapo. Les termes qui sont ici, vous les connaissez tous à l'exception d'un terme qui est l'accélération de coriolisse. Revenons sur ces différents termes. Imaginons qu'on a un mouvement radial le long de la ligne de coordonnée radial. Comme ceci. Si on a un mouvement radial, prenant un mouvement qui est accéléré, l'accélération ce sera la dérivé temporelle

notes

résumé

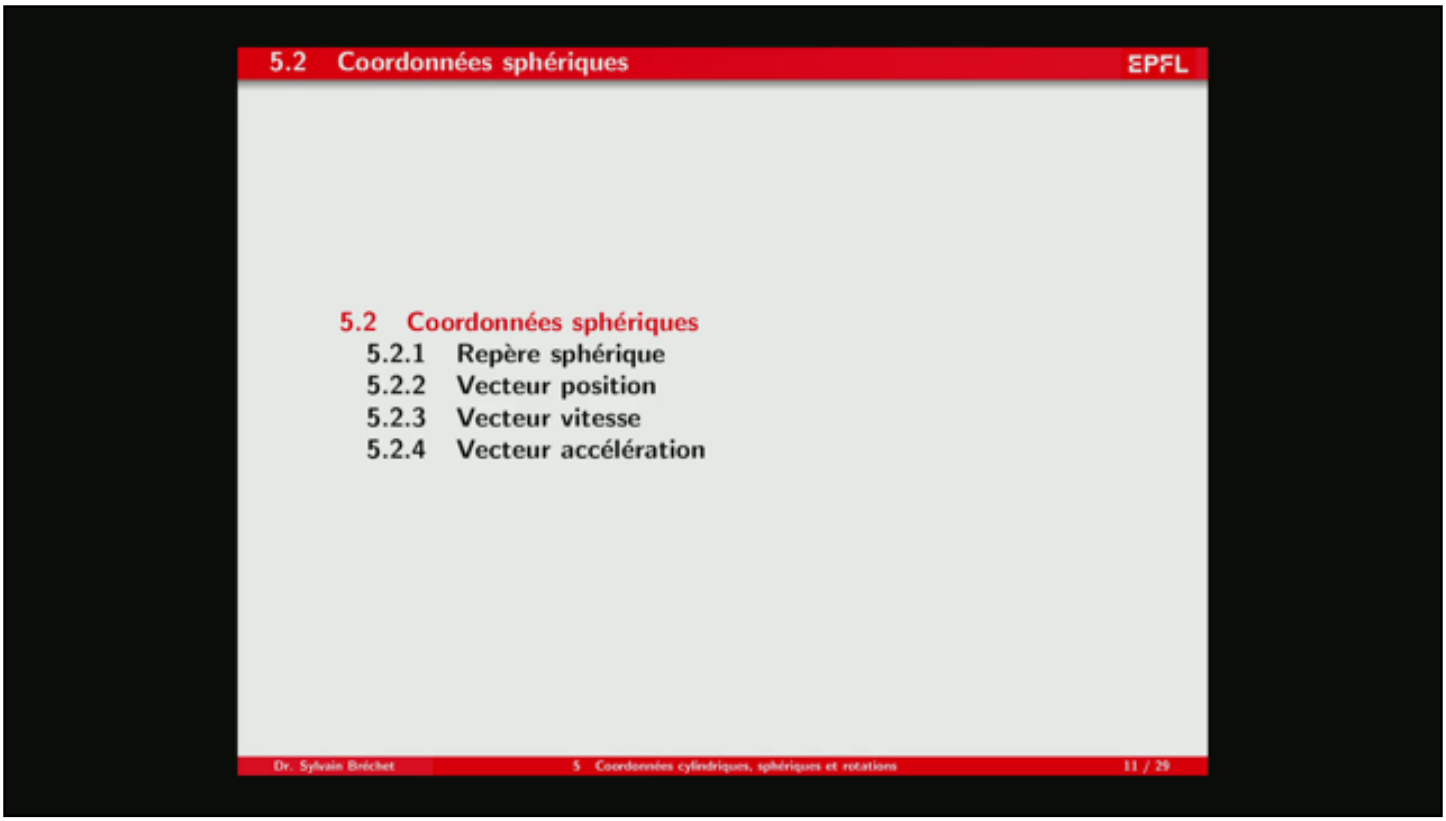
40m 10s



seconde de la coordonnée radial. Foiset-le vector unité radial, c'est le terme qui est ici. C'est l'accélération radial. Prenons maintenant un mouvement circulaire selon la deuxième ligne de coordonnée. Si on a un mouvement circulaire, forcément qu'on a une accélération orthogonal, on a un terme d'accélération centripète. Ce terme d'accélération centripète est caractéristique. Il est opposé à rô. Il y a un signe moins. L'accélération, c'est le produit du rayon qui est la coordonnée radial rô. Multiplié par la vitesse angulaire au carré, le omega carré. Ce omega ici, c'est un phi point. C'est la dérivé temporelle de l'angle phi. On a donc moins rô, phi point carré, foire au chapeau. Gardons toujours notre trajectoire circulaire. Imaginons maintenant qu'on a une accélération qui peut se faire de manière tangentiale, qu'on a un mouvement circulaire uniformément accéléré par exemple. L'accélération tangentiale et selon phi chapeau, c'est le produit du rayon de la trajectoire qui est rô, multiplié par l'accélération ongulaire qui est la dérivé seconde de l'angle qui est ici phi, donc c'est rô, phi point point. Par le calcul, il y a un terme supplémentaire qui intervient. Ce terme-là, pour l'instant, on ne le comprend pas dans le détail, même si on en a vu les effets tout à l'heure avec le feutre. C'est le terme dit d'accélération de coriolisse, qui est ici en 2 rô points phi point. Les termes d'accélération de coriolisse sont toujours caractérisés par un facteur 2. Les termes d'accélération sans trippette ont assigné moins. Les termes d'accélération de coriolisse en facteur 2. Les termes d'accélération tangentiale, une dérivé seconde. D'accord ? Vous allez comme ça tout de suite pouvoir les reconnaître à l'oeil quand vous avez des expressions compliquées. D'accord ? On va maintenant prendre la pose et après la pose, on fera le même exercice en coordonnée sphérique. C'est nettement plus complexe au niveau du calcul, même si conceptuellement, l'idée est essentiellement la même.

notes

résumé



D'accord ?

notes

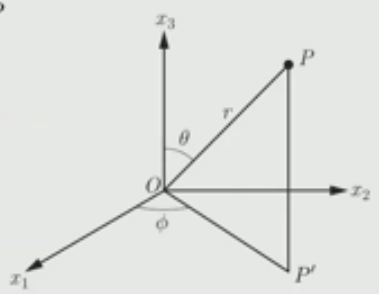
résumé

5.2 Coordonnées sphériques

EPFL

- Les coordonnées sphériques sont adaptées pour décrire un mouvement avec une symétrie sphérique.
- **Coordonnées cartésiennes :** point P

  $P = (x_1, x_2, x_3)$
- **Coordonnées sphériques :** point P



- **Lien géométrique :**
  1.
  2. (5.11)
  3.
- **Coordonnées polaires :** coordonnées sphériques dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$

Voilà. Après avoir modélisé les coordonnées cylindriques, on va maintenant passer aux coordonnées sphériques. D'accord ?

notes

résumé

44m 48s

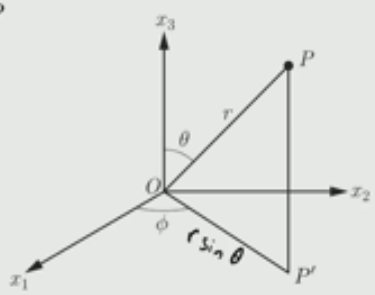
5.2 Coordonnées sphériques

EPFL

- Les coordonnées sphériques sont adaptées pour décrire un mouvement avec une symétrie sphérique.
- **Coordonnées cartésiennes :** point P

  $P = (x_1, x_2, x_3)$
- **Coordonnées sphériques :** point P

  $P = (r, \theta, \phi)$ ⚠
- **Lien géométrique :**
  1. $x_1 = r \sin\theta \cos\phi$
  2. $x_2 = r \sin\theta \sin\phi$ (5.11)
  3. $x_3 = r \cos\theta$
- **Coordonnées polaires :** coordonnées sphériques dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$



À quoi servent les coordonnées sphériques ? Et bien, ce sont les coordonnées les plus utiles au monde. Prenez une charge électrique. C'est un point, un défaut de point dans l'espace. Vous avez une rotation dans les 3 directions de l'espace autour du point. Tout ceci se décrit évidemment en coordonnées sphériques. Vous en aurez un aperçu au cours du semestre suivant où vous ferez de l'électromagnétisme. D'accord ? Donc, on aimerait 3 coordonnées sphériques qui permettent de rendre compte de la position d'un point matériel. Bon. Il faut imaginer qu'on empile des sphères concentriques. La première coordonnée la plus évidente, c'est le rayon de la sphère. Petit air. Donc, cette coordonnée va directement de l'origine jusqu'à p. Le vecteur op à pour norme la coordonnée radial sphérique. Ok ? Ensuite, on se trouve, par exemple, si on prend la Terre comme sphère, on se trouve sur le globe de la Terre. On aimerait déterminer un point la surface de la Terre. Qu'est-ce qu'on a besoin ? D'un angle de latitude et d'un angle de longitude. On a besoin de 2 angles. Alors là, c'est pas tout à fait l'angle, si vous voulez, de l'attitude qu'on va prendre, puisque l'angle de l'attitude est définie par rapport à l'équateur. Nous, on prendra un angle qui est définie par rapport au Pôle, au Pôle Nord. D'accord ? Si on prend l'axe vertical qui est ici, on va définir un angle qui est l'angle d'inclinaison du vecteur op par rapport à la verticale, qui est cet angle Theta. Ok ? C'est l'angle nodale. Et puis évidemment, qu'on aura besoin d'un angle de latitude qui va définir l'orientation du demi-plan vertical qui passe par le point P par rapport au plan de référence qui est ici. D'accord ? C'est l'angle azimital Phi, le même qu'en coordonnée cylindrique. Attention, attention, piège. Je mets volontairement un signe attention. C'est l'ordre des variables angles. Si vous regardez

notes

résumé

45m 3s

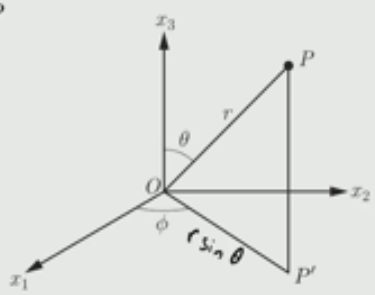
5.2 Coordonnées sphériques

EPFL

- Les coordonnées sphériques sont adaptées pour décrire un mouvement avec une symétrie sphérique.
- **Coordonnées cartésiennes :** point P

  $P = (x_1, x_2, x_3)$
- **Coordonnées sphériques :** point P

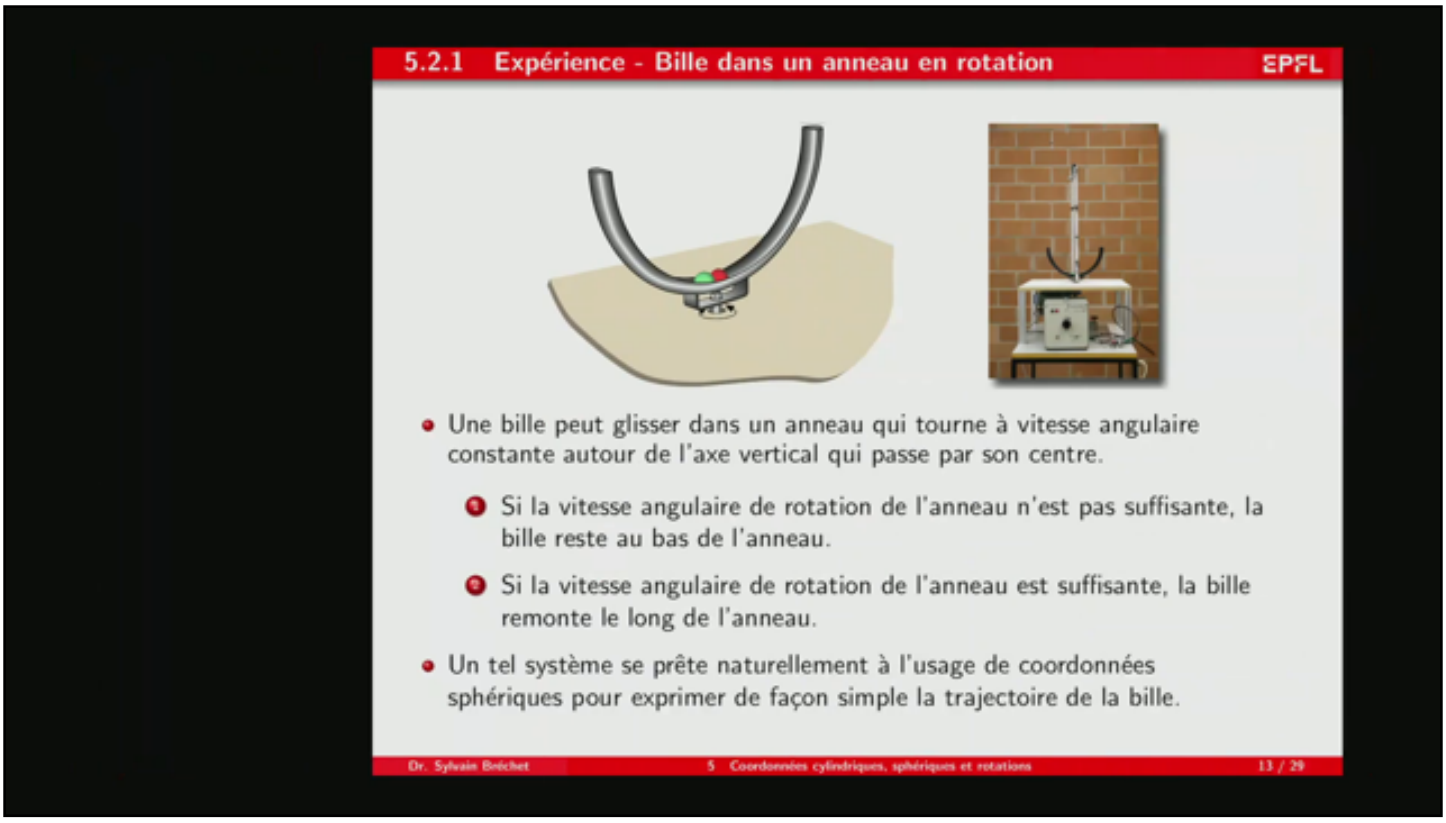
  $P = (r, \theta, \phi)$ ⚠
- **Lien géométrique :**
  1. $x_1 = r \sin\theta \cos\phi$
  2. $x_2 = r \sin\theta \sin\phi$ (5.11)
  3. $x_3 = r \cos\theta$
- **Coordonnées polaires :** coordonnées sphériques dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$



les coordonnées cylindriques, l'angle azimital c'est la deuxième coordonnée. En coordonnée sphérique, c'est la troisième coordonnée. Notez bien ça. Parce qu'à l'examen, j'ai vu des gens perdre des points à cause de ça. Et c'est dommage. D'accord ? Qui ont interverti l'ordre des angles dans le choix des coordonnées sphériques. Parce qu'après on n'a plus un repère direct. D'accord ? Donc l'angle azimital c'est la troisième coordonnée sphérique. C'est la deuxième coordonnée cylindrique. Oui ? Pardon ? Là c'est un P. Ah oui, il y a des R. Parce que R est réservé à la coordonnée radiale dans le plan horizontal. Là c'est une coordonnée radiale au sens général autour d'un point. Dans les coordonnées cylindriques on a une symétrie de rotation, mais que dans un plan. Alors qu'en coordonnées sphériques on a une symétrie de rotation dans les trois directions d'espace. D'accord ? Voilà. Donc, ce qu'on va faire maintenant c'est qu'on va exprimer les anciennes coordonnées X1, X2 et X3 en termes des nouvelles. Bon. Alors, faisons tout d'abord une projection du point matériel P sur le plan horizontal. On a P prime. Et donc si on projette sur le plan horizontal on fait une projection sur le cathète qui est opposé à l'angle Theta. Et donc on va se retrouver avec un sinus de Theta en d'autres termes la norme du vecteur OP prime CR fois le sinus de Theta. On va donc retrouver dans le plan horizontal qu'on va retrouver pour X1

notes

résumé

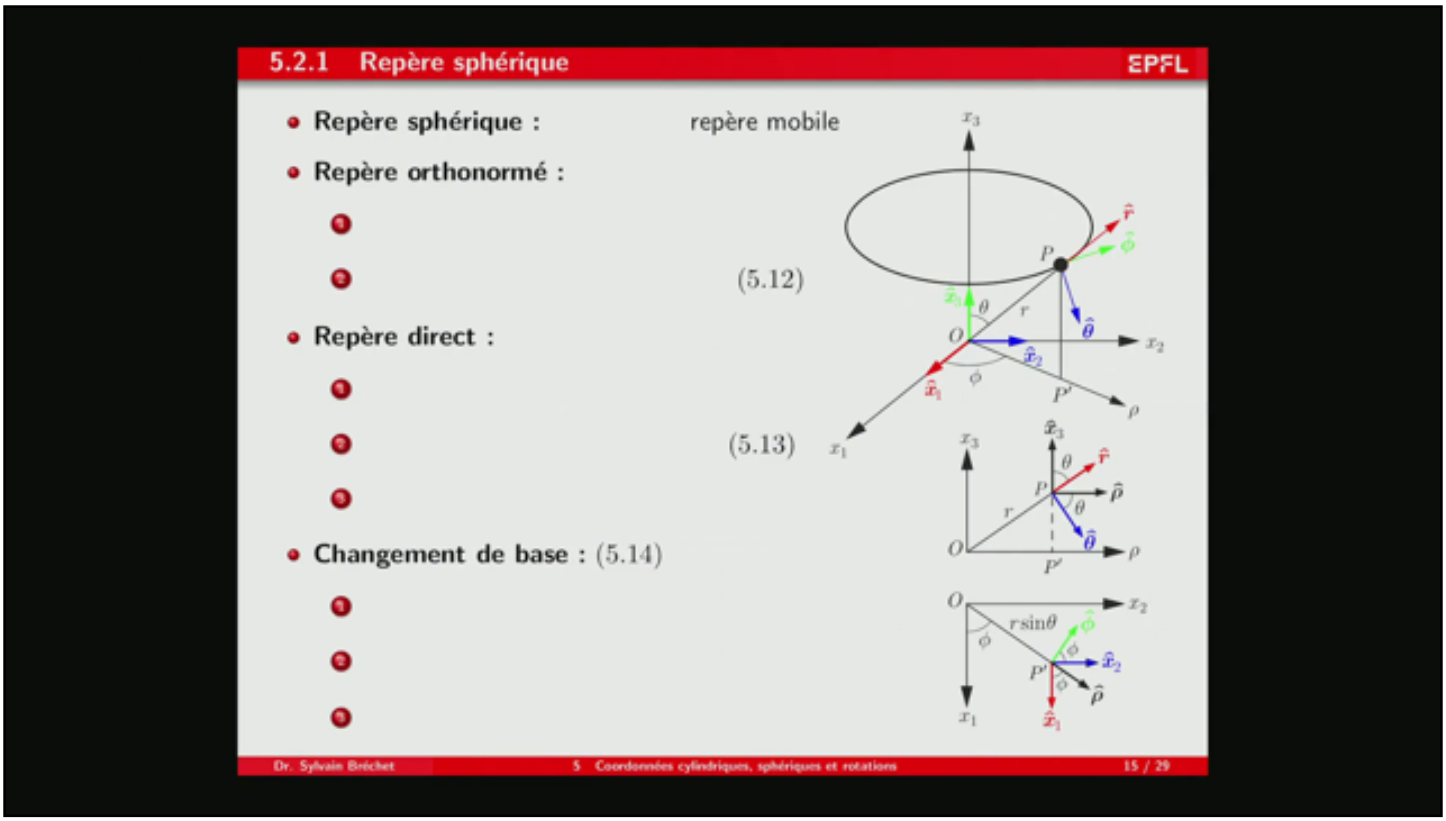


et pour X2. Mais c'est pas terminé, il y a encore un autre angle. Il y a l'angle phi. Alors, lorsqu'on fait une projection de OP prime maintenant sur le premier axe de coordonnées, l'axe de coordonnées des absces aux X, on va projeter sur le cathète adjacent à l'angle phi. Donc, on aura un que-sinus de phi qui va s'ajouter ici. Ok ? En revanche, lorsqu'on projette sur l'axe des ordonnées on va projeter sur le cathète opposé à phi. On va donc se retrouver avec le sinus de phi. Et puis, il va nous rester une dernière composante qu'on obtient en projettant directement dans le plan vertical OP sur l'axe vertical. On va projeter sur le cathète opposé à l'angle Theta. On va se retrouver avec un R... Non, sur le cathète. Adjacent à l'angle Theta, autant pour moi, celui-ci, on va se retrouver avec un R que-sinus de Theta. Alors, si vous prenez la somme des carrets des trois composantes, X1 carré, plus X2 carré, plus X3 carré, vous pouvez vous couper en faisant apparaître sin carré Theta, plus cos Theta, qui vaut 1, puis ensuite cos carré phi, plus sin carré phi, qui vaut 1. Vous allez montrer que X1 carré, plus X2 carré, plus X3 carré, t'égales à 1, R carré. D'accord ? Qui est l'équation cartésienne d'une sphère. C'est donc bien cohérent. Vous pouvez retrouver aussi les coordonnées polaires en vous plaçant dans le plan horizontal qui contient l'origine, ce qui revient à choisir le nodal Theta qui vaut p2, le sinus de p2 vaut 1, et le cos sinus de p2 vaut 0. Il reste donc les deux premiers coordonnées avec un R cos phi et un R sin phi. Alors, voyons ce qu'on peut faire maintenant avec des coordonnées

notes

résumé

48m 37s

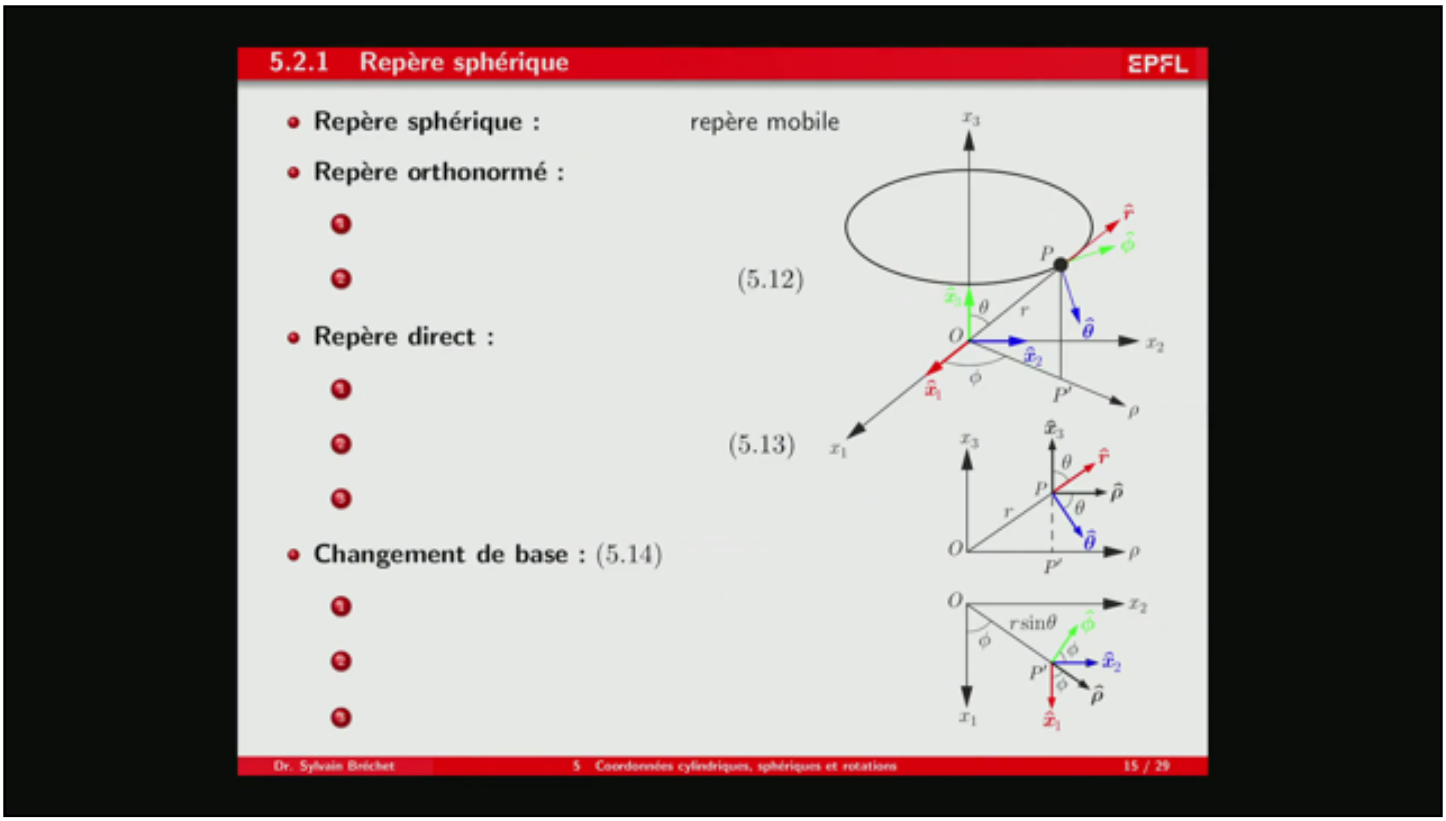


sphériques. On peut traiter un problème qui va faire apparaître une symétrie de rotation, d'accord ? Avec deux ans. Alors, imaginons qu'on ait une bille ici, dans un anneau, donc la bille peut visser dans cet anneau, dans ce 2 mi-anneaux, d'accord ? Alors si on prend l'origine ici, par exemple, au centre de l'anneau qu'on aurait construit par extension d'une mi-anneau, on peut introduire un angle nodale, un angle Theta ici pour repérer la position de la bille dans l'anneau. Puis en plus, on a un moteur qui fait tourner le plan de l'anneau autour de l'axe vertical, d'accord ? Dans ce sens-là. Donc on a un vecteur vitesse angulaire omega qui est orienté vers l'eau. Donc on va se retrouver avec l'orientation du plan vertical qui contient le 2 mi-anneau, qui est repéré par un autre angle qui est l'angle phi. On a donc un angle Theta, on a un angle phi. La figure de révolution que vous obtenez en faisant tourner le 2 mi-anneau, c'est un bol, c'est-à-dire une domisphère. Et notamment, ce problème, on a tout intérêt à le traiter en coordonnée sphérique. On le fera ensemble la semaine prochaine. Et si pour vous amuser, vous avez envie de voir ce que ça donne en coordonnée cartésienne, vous pouvez essayer de le faire. Vous allez voir que c'est tellement difficile au niveau calculatoire, que c'est quasiment impossible à faire correctement. Et en plus, vous n'allez rien y voir, parce que les arbres vont vous cacher la forêt. Les coordonnées cartésiennes vont vous empêcher de voir les symétries cachées derrière le problème. Alors, qu'est-ce qu'on obtient quand on joue avec ce 2 mi-anneau ? C'est ce qu'on va faire maintenant. On va enlever la bi-rouge, on va garder la verte. Voilà. Et puis, on va mettre en rotation le plan de l'anneau. Pour l'instant, c'est pas fascinant, c'est pas rien. C'est-à-dire que quand la vitesse angulaire de

notes

résumé

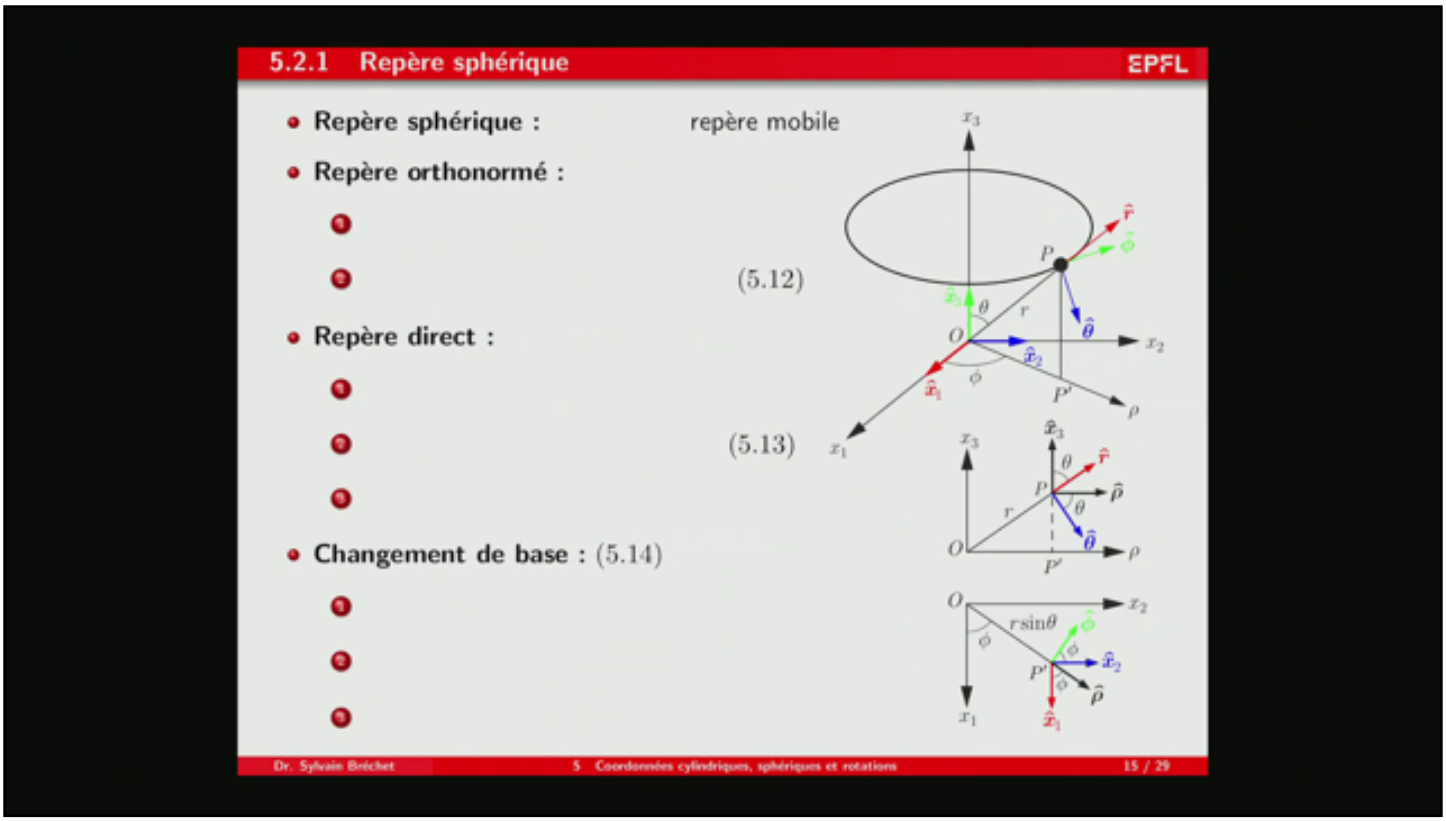
50m 27s



rotation est faible, on a clairement une position stable où la bi se trouve au bas de l'anneau. Si j'augmente, la vitesse angulaire de rotation, dans le plan vertical de l'anneau qui est un référentiel accéléré et dû à la rotation, il y a une force qui va apparaître, qui est la force centrifuge. Regardez ce qui va se passer. Hop. À partir de certaines valeurs seuils, la bi remonte. Et puis, si on continue à faire tourner encore plus vite, elle remonte encore plus. Je vais pas y aller trop fort, parce qu'après, je vais mailler le système. D'accord, je diminue la vitesse. Et tout d'un coup, si je passe en dessous de la valeur seuil, voilà, la bi retourne à cette position d'équilibre stable. Pourquoi? La réponse, vous l'aurez la semaine prochaine. D'accord, on va garder un peu de suspense. Je vais déjà vous donner une partie de la solution de la partie mathématique. Le cosineuse d'un angle est borné supérieurement par 1 et inférieurement par moins 1. Lorsque ceci n'est pas le cas, on ne peut pas avoir de solution dont le cosineuse de l'angle se comporterait de manière différente. Donc, ceci va nous expliquer pourquoi on aura une certaine position d'équilibre et pas une autre. D'accord, il faut que les mathématiques soient satisfaites. Bon. Maintenant, pour pouvoir définir cette question de l'anglais sphérique, on a besoin des notions de lignes de coordonnées sphéoriques. C'est la même idée que pour les lignes de coordonnées scénarctriques. On va faire varier une coordonnée en en maintien du constant. Faisons varier la coordonnée radiale rô. On va maintenir l'angle nodale theta ainsi que l'angle azimutale Et donc la corneille radiale, qui est un nombre réel positif, va varier entre 0 et 9. Bon, concrètement, qu'est-ce que ça donne ? Si theta est maintenu constant, on se retrouve avec un cône, un cône de demi-angle d'ouverture theta dans le plan vertical

notes

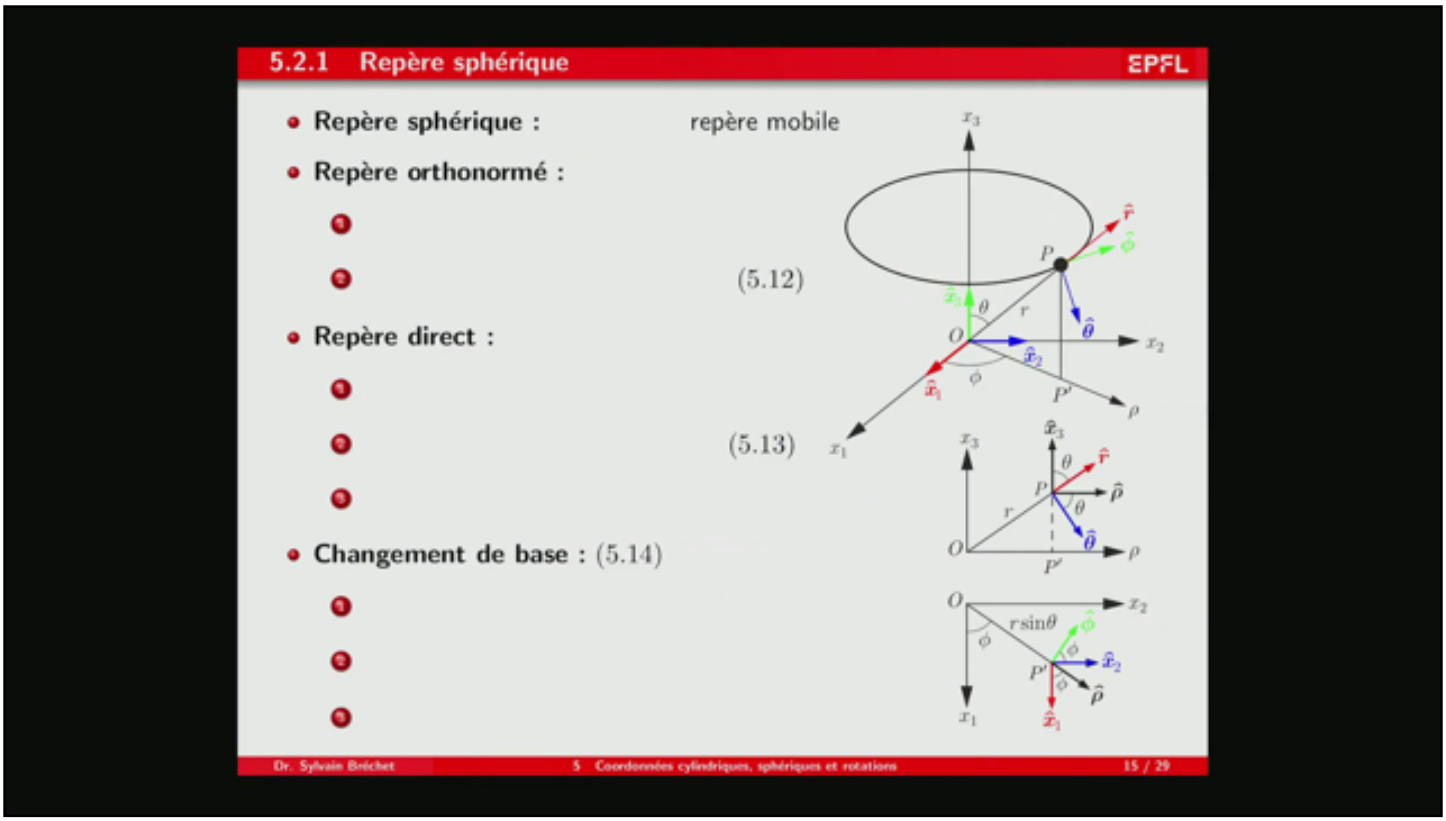
résumé



autour de l'axe vertical au X3. Vous avez l'axe qui est là, le demi-cône, il est ici. OK ? Le voilà. OK ? Bon, maintenant, si on maintient un phi constant, ce qu'on va faire, c'est définir un demi-plan vertical issu de l'axe au X3. L'intersection entre ce demi-plan vertical et le cône qu'on vient de donner, eh bien, on va se trouver sur la surface du cône. C'est ce segment qui est orienté radialement vers l'extérieur où la coordonnée R, la corneille radiale, augmente. Donc, la première ligne de coordonnée, elle est ici. Elle passe évidemment par le point P. D'accord ? Deuxième ligne de coordonnée. Celle qu'on obtient, on maintient un constant l'angle phi ainsi que la coordonnée radial R. Si on maintient donc ces deux coordonnées constantes, ce qu'on va faire varier, c'est l'angle nodale theta qui va varier ici entre 0 et pi. Alors, laissez-moi juste vous dire pourquoi il varie entre 0 et pi, et pas 0 et 2 pi. On a deux angles. L'angle phi et l'angle theta. On veut repérer chaque point une fois et pas deux. D'accord ? Donc, on est obligé de faire varier un angle entre 0 et pi. Ça sera l'angle theta. Et l'autre angle, on va le faire varier entre 0 et 2 pi. OK ? Alors, maintenant, si phi est maintenu constant, on a le demi-plan vertical qui est ici. Si R est maintenu constant, on va se retrouver avec une sphère de rayons R centré à l'origine. L'intersection entre les deux va nous donner un demi-cerc dans le plan vertical qui est ici, qui définit positivement vers le bas, puisque l'angle theta est définit positif comme ceci. D'accord ? Vous le voyez en perspective, donc vers le bas. Donc voilà, la deuxième ligne de coordonnées, la ligne de coordonnées nodales. Terminons avec la troisième. Pour la troisième, on maintient constant la coordonnée radial R. Donc, on

notes

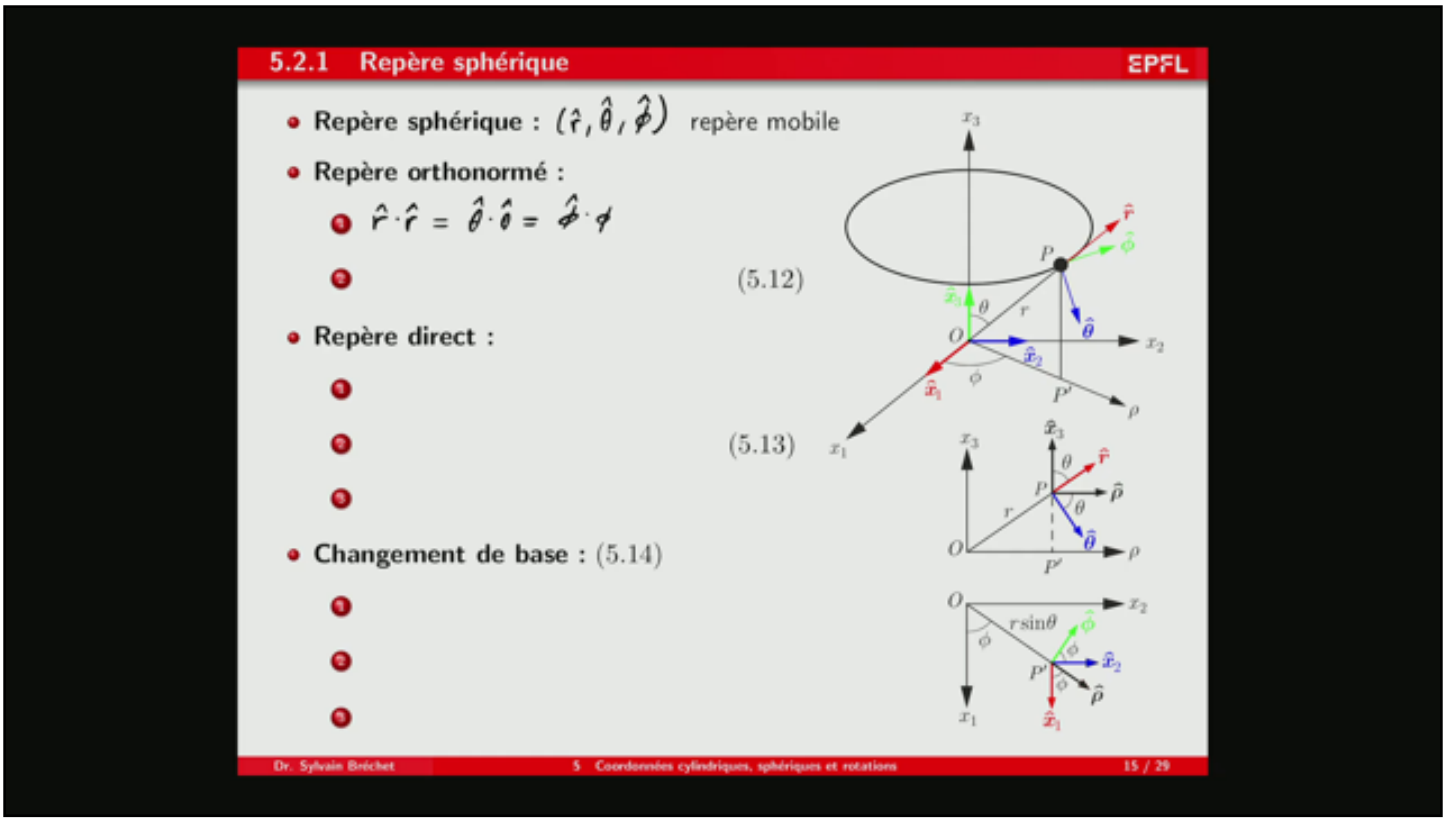
résumé



a une sphère qui passe par le point P de rayons R. On maintient constant l'angle theta. Donc, on se retrouve avec un cône de demi-angle d'ouverture theta, qui est ici. Donc, vous avez la sphère L-caune. L'intersection entre la sphère L-caune va définir un demi-cerc qui se trouve ici, dont le rayon va correspondre à R fois le sinus de theta. Le rayon est ici. OK ? Donc, on va se retrouver ici avec un angle phi qui varie entre 0 et 2π. OK ? Bon. Alors, maintenant, les vecteurs unitaires sont engeants aux lignes de coordonnées et, issus du point P, ils ont une longueur qui correspond à l'unité. Donc, on prend la première ligne de coordonnées qui est ici, et donc on va placer notre vecteur unitaire là. Ça, c'est le vecteur R-chapot. Ensuite, on prend la deuxième ligne de coordonnées qui est l'arc de cercle que vous voyez dans le plan vertical. On se place au point P. On prend le vecteur tangent. Ça, c'est le vecteur theta-chapot. Ensuite, on prend la troisième ligne de coordonnées qui est le cercle que vous voyez dans le plan horizontal. Alors là, c'est plus dur à dessiner, pratiquement, vu la perspective qui est donnée ici, mais vous avez un vecteur unitaire tangent ici au cercle, dans le plan horizontal, qui est le vecteur phi-chapo. OK ? Alors, pour mieux visualiser les choses, il faudrait décaler un tout petit peu la perspective.

notes

résumé

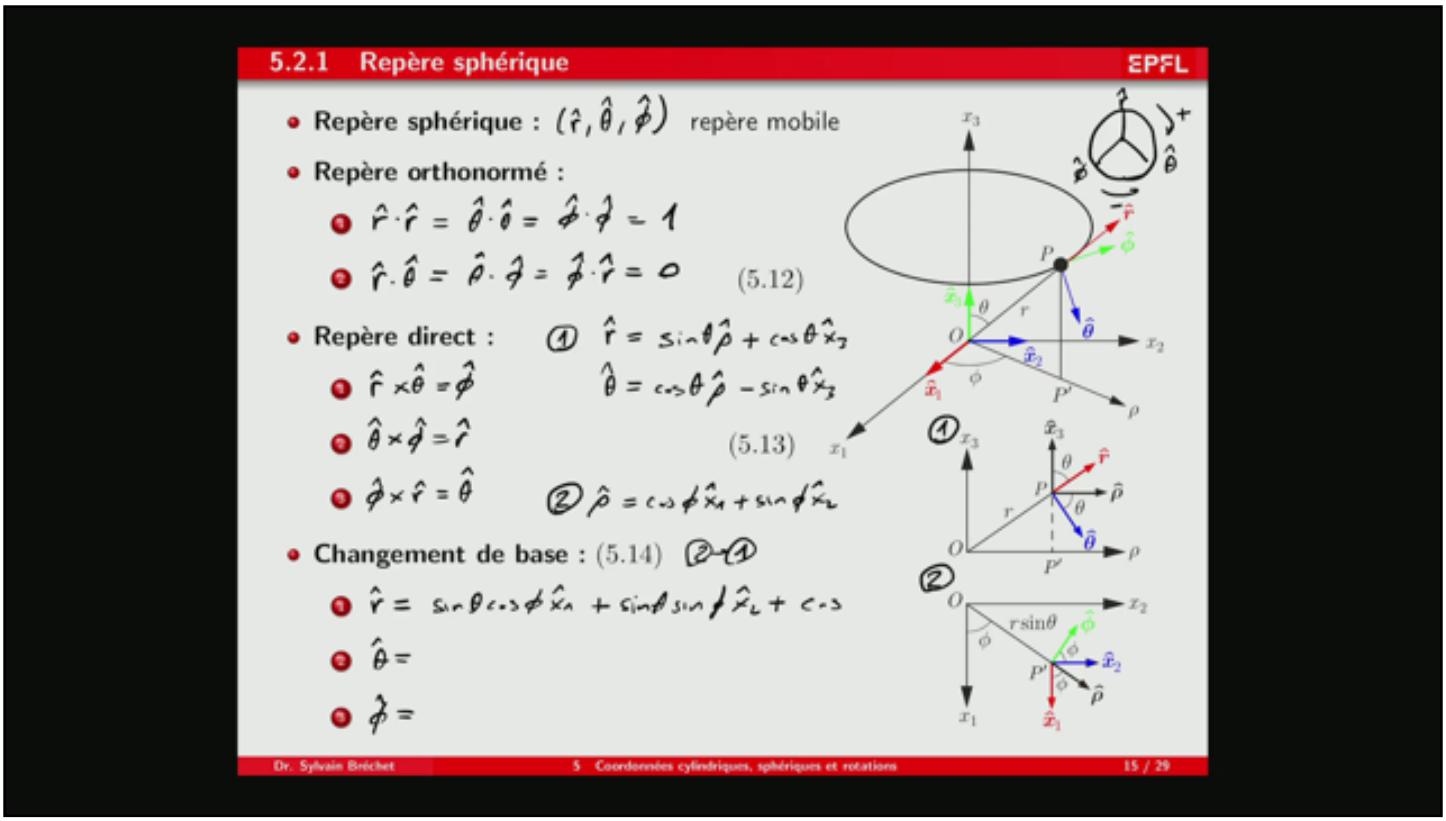


Et c'est ce qui a été fait ici. Donc là, vous voyez, dans le prolongement de la première ligne de coordonnées R-chapo, vous avez theta-chapo orienté vers le bas, phi-chapo qui est en genre à la ligne de coordonnées horizontales. D'accord ? Bon. Le repère sphérique est donc constitué des vecteurs unitaires R-chapo, theta-chapo et phi-chapo, je rappelle, qu'il faut les choisir dans l'ordre. C'est essentiel. C'est un repère orthonormé. Donc le produit scalaire de R-chapo avec R-chapo, c'est le produit scalaire de theta-chapo avec lui-même, c'est le produit scalaire de phi-chapo avec lui-même,

notes

résumé

58m 10s

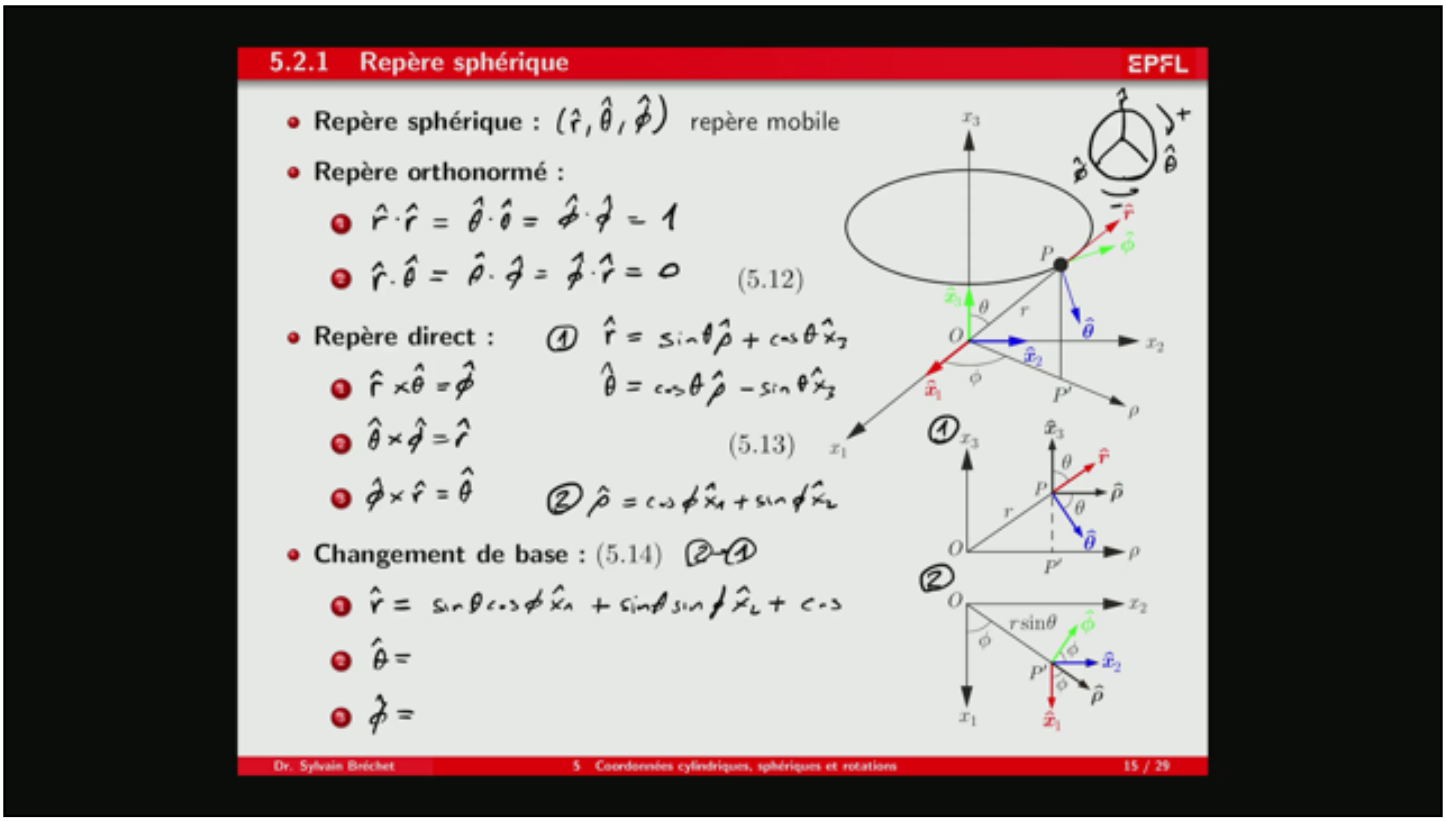


c'est un comme c'est des vecteurs unitaires. Comme ils sont orthogonaux, le produit scalaire de deux vecteurs différents va nécessairement nous donner zéro. D'accord ? Et c'est un repère direct. Donc, si vous prenez le dessin à droite, faites le produit vectoriel des deux premiers vecteurs R et theta. Vous alignez l'index de la main droite selon R, le majeur selon theta, vous voyez que le pouce il est horizontal, il est orienté selon phi. Ok ? Donc le produit vectoriel de R-chapo avec theta-chapo nous donne phi-chapo. On peut faire le même exercice en décalant la main. Le produit vectoriel de theta-chapo avec phi-chapo nous donne R-chapo et finalement, le produit vectoriel de phi-chapo avec R-chapo va nous donner theta-chapo. D'accord ? Là encore, on se retrouve avec la structure du logo Mercedes avec en haut le vecteur R-chapo, à droite le vecteur theta-chapo, à gauche le vecteur phi-chapo. Lorsqu'on tourne dans le sens horaire, dans le sens églis de montre, on fait le produit vectoriel de deux vecteurs, on obtient le suivant avec un signe plus, dans le sens opposé, c'est le précédent, avec un signe moins. Ok ? Alors vient maintenant l'étape la plus délicate, qui en coordonnée sphérique, je vous l'accorde, pas simple à faire. Il faut qu'on trouve la formule de changement de base qui amène le repère cartésien sur le repère sphérique. Bon. Alors, au final, ce qu'on désire trouver évidemment, c'est R-chapo, theta-chapo et phi-chapo en termes de X1, X2 et X3-chapo. On ne va pas le trouver comme ça tout de suite ou alors faudra avoir une très très bonne vision dans l'espace. D'accord ? Le plus simple, c'est de procéder par étape. De regarder ce qui se passe dans un plan vertical et de regarder ce qui se passe dans un plan horizontal. Alors on ne va pas choisir n'importe quel plan vertical, on va prendre le plan vertical qui contient

notes

résumé

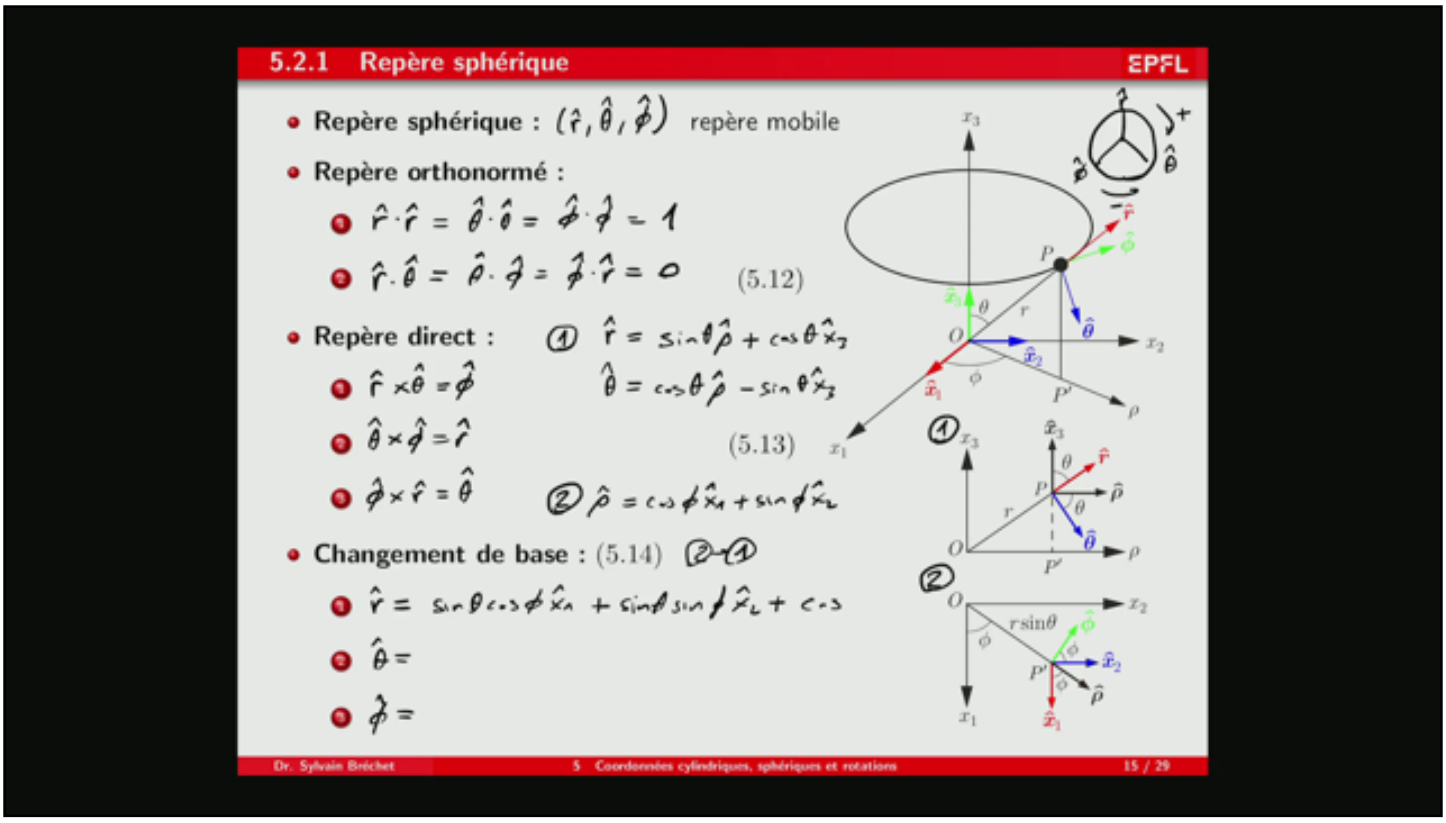
58m 43s



l'origine, le point P et le point P prime. D'accord ? Et alors, vous avez ici un axe de coordonnée, qui est l'axe de coordonnée radial-horizontale des coordonnées cylindriques, c'est pas des coordonnées sphériques. Et on va se retrouver avec un vecteur unitaire dans ce plan vertical qui est ce vecteur rô-chapo qui va aussi apparaître dans le plan horizontal qui va nous permettre de résoudre le problème. Donc, si on regarde les vecteurs qui apparaissent dans ce plan vertical-radial, on a R-chapo, theta-chapo, ils sont là, ils sont en perspective sur le dessin d'eau, ils sont à l'échelle, disons, non, ils sont dessinés de manière conventionnelle, non pas en perspective, avec des angles droits qui sont des vrais angles droits dans le plan vertical-radial qui se trouve ici. D'accord ? Donc vous avez R-chapo, theta-chapo, vous avez rô-chapo, ainsi que le vecteur unitaire vertical x-3-chapo. La première étape, ça va être d'exprimer, R-chapo et theta-chapo en termes de rô-chapo et de x-3-chapo dans le plan vertical. Alors, on va le faire ici, je vais mettre ici juste un petit 1, on va reproduire le 1 là, et on va d'abord écrire que R-chapo, si on fait des projections, on doit projeter sur le cathète opposé à l'anglophie pour retrouver rô-chapo. On aura donc le sinus de theta fois rô-chapo et on va projeter sur le cathète adjacent pour x-3-chapo. On a le cosine de theta fois x-3-chapo. D'autre part, pour phi-chapo, on va projeter sur le cathète adjacent pour aller sur l'axe qui donne rô-chapo. On aura donc le cosine de theta fois rô-chapo. On projette sur le cathète opposé pour x-3-chapo et attention, dans le sens opposé, on aura moins le sinus de theta fois x-3-chapo. D'accord ? Oui, mais il y a une deuxième étape maintenant. Cette deuxième étape consiste à exprimer le vecteur, qui n'est pas un vecteur unitaire des coordonnées sphériques, rô-chapo, en termes des

notes

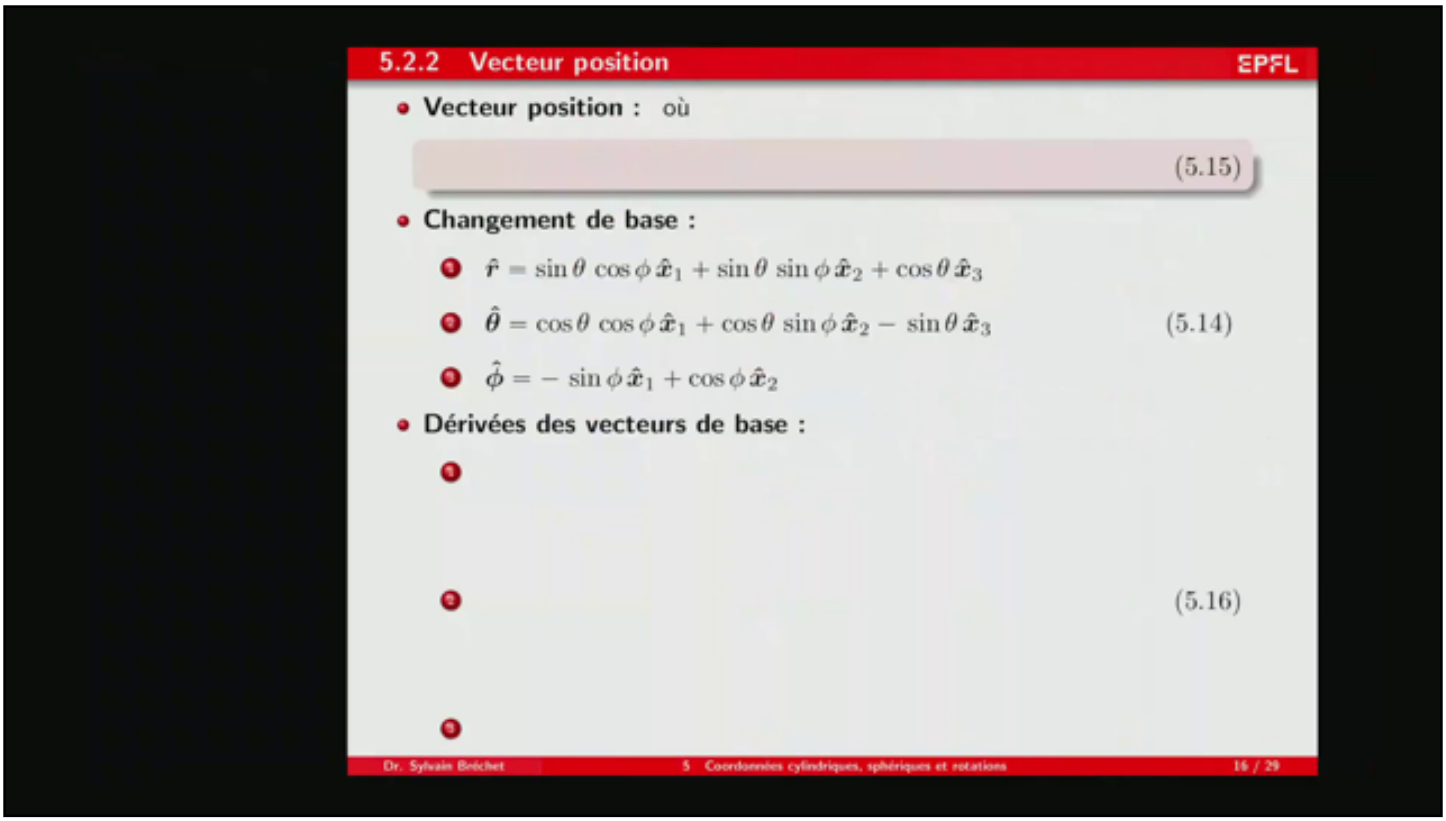
résumé



vecteurs unitaires sphériques qui se trouvent dans le plan horizontal, puisque rô-chapo est horizontal, à savoir phi-chapo, d'accord ? Et puis, non, parce qu'on veut... Non, je l'ai dit une bêtise. On veut l'exprimer en termes des vecteurs unitaires qui se trouvent dans le plan horizontal, ceux du repère cartésien, donc en termes de x-1 et de x-2-chapo. Donc, on prend notre repère. Ce repère, on le déplace sans changer son orientation pour l'amener sur le point p-prime. Alors, dans le plan horizontal, le seul vecteur horizontal qui va apparaître, c'est le vecteur phi-chapo qui est là. On a ce vecteur auxiliaire qu'on a introduit au chapeau qu'on retrouve ici. Puis maintenant, on prend le repère cartésien, on le translate sans changer son orientation. On se retrouve avec les vecteurs x-1 et x-2-chapo. Donc, maintenant, grâce à ça, on va être capable d'exprimer rôchapo en termes de x-1 et de x-2-chapo. Donc, ça, c'est la deuxième étape du calcul. Rôchapo sera le cossinus de phi x-1-chapo plus le sinus de phi x-2-chapo. D'accord ? Simplement, une projection ici dans ce repère. Alors, maintenant qu'on a obtenu cela, on va pouvoir prendre rôchapo, son expression en termes de combinaison linéaire de x-1 et de x-2-chapo, qu'on va substituer dans les deux vecteurs unitaires qui sont là. Et donc, on sera capable de les exprimer en termes de x-1, x-2 et x-3-chapo. On aura donc pour r-chapo, j'ai peut-être juste à noter, on prend deux qu'on substitue dans un. Voilà. Donc, pour r-chapo, on aura le sinus de theta fois le cossinus de phi x-1-chapo plus le sinus de theta fois le sinus de phi x-2-chapo

notes

résumé

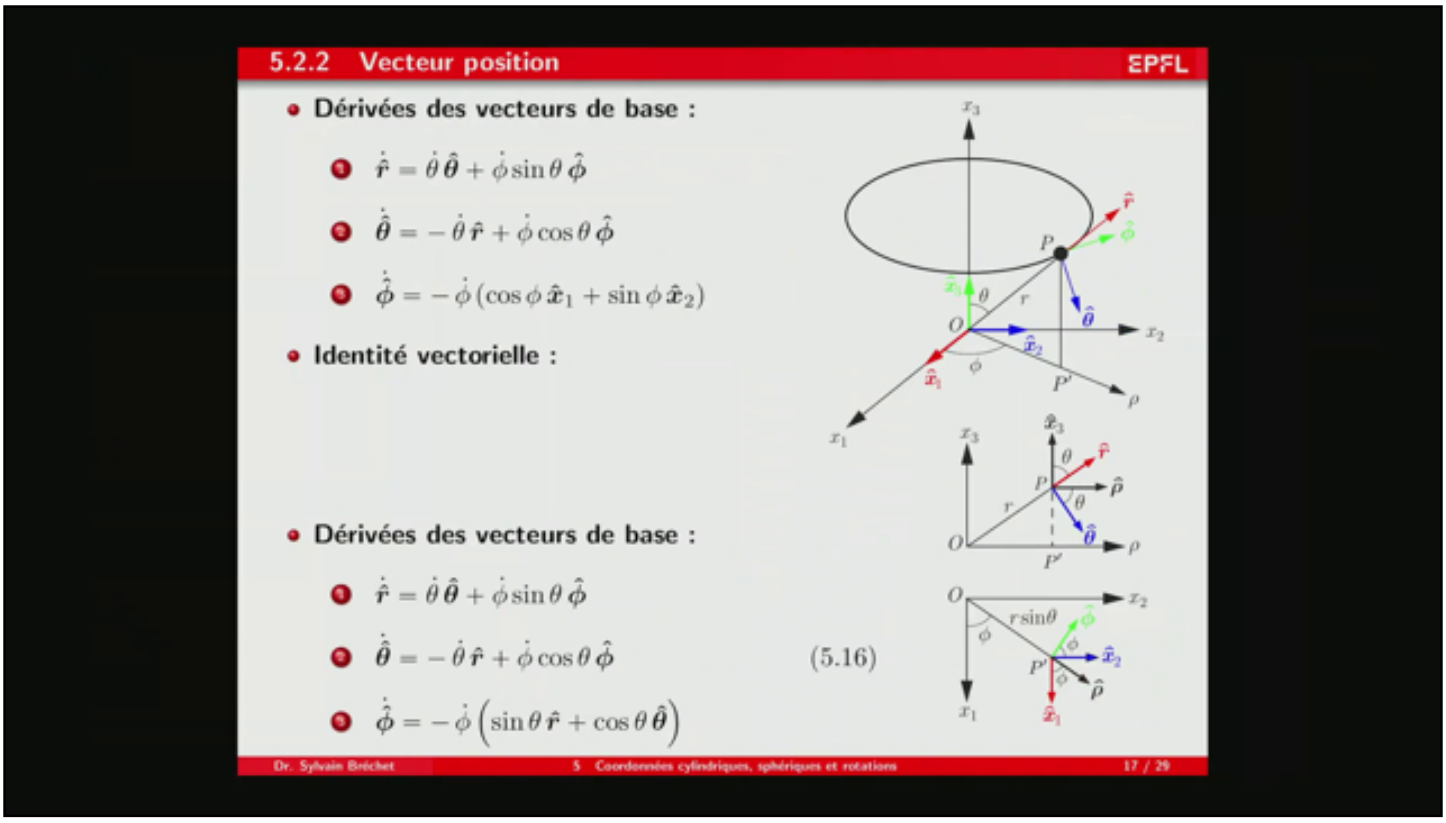


plus le cossinus de theta x-3-chapo. Ensuite, pour theta-chapo, on aura le cossinus de theta fois le cossinus de phi x-1-chapo plus le cossinus de theta fois le sinus de phi x-2-chapo moins le sinus de theta x-3-chapo. Bon, et il nous reste l'étape la plus simple qui est d'exprimer tout simplement phi-chapo en termes d'x-1 et de x-2-chapo. Donc, on se place dans le plan horizontal qui passe par l'origine qui est ici et on projette ce vecteur. La projection selon x-2-chapo se fait sur le cathète adjacent, c'est le cossinus de phi qui intervient. Pour x-1-chapo, ça se fait sur le cathète opposé. C'est le sinus de phi. Mais attention, dans le sens opposé, il y aura un signe moins. Donc, on va se retrouver avec moins le sinus de phi fois x-1-chapo plus le cossinus de phi fois x-2-chapo. Alors là, voyez que cette application linéaire n'est pas si simple que ça. On a envoyé les vecteurs unitaires x-1, x-2 et x-3-chapo sur des vecteurs images r-chapo, theta-chapo et phi-chapo. OK ? C'est une combinaison de deux rotations, une rotation dans un plan horizontal et une rotation dans un plan vertical-radial. D'accord ? Et c'est comme ça qu'on passe des anciens vecteurs unitaires aux nouveaux. Bon.

notes

résumé

65m 1s

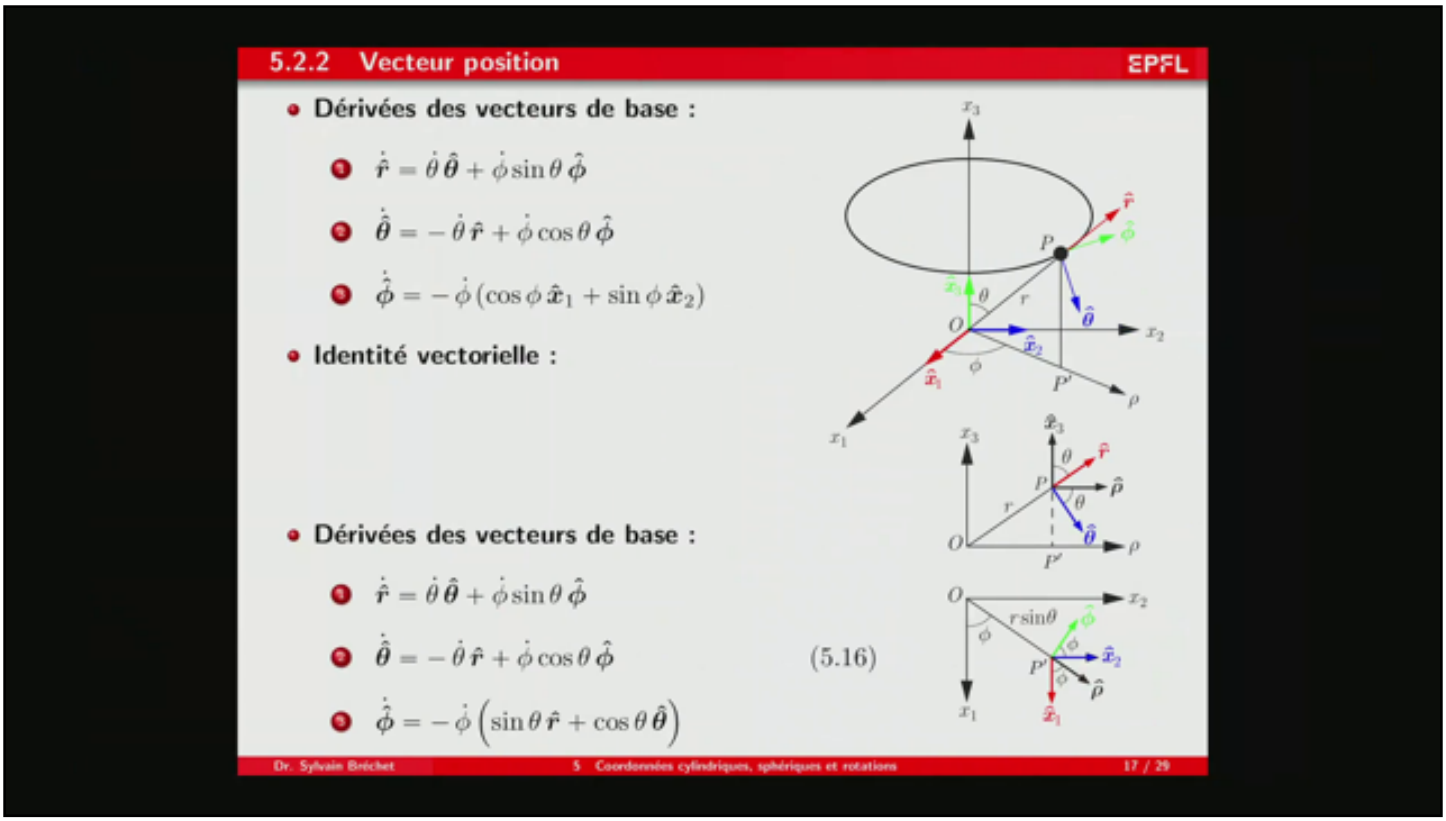


Faisons maintenant de la cinématique. On veut décrire le vecteur position en coordonnée sphéro. Comment est-ce qu'on peut faire ceci ? Eh bien, cette partie-là, et c'est bien la seule en coordonnée sphérique qui est simple, elle est simple. D'accord ? Le vecteur position, c'est le vecteur OP. Ce vecteur OP a pour norme la coordonnée radial r et le vecteur unitaire r-chapo est toujours orienté le long de OP. Donc, le vecteur position r, c'est r-foyre-chapo. Alors, qu'est-ce qui pose ceci quand on voit ça ? Où se cachent nos angles ? Theta et Phi. Eh bien, les angles Theta et Phi se cachent dans l'orientation du vecteur unitaire dans l'espace. C'est-à-dire que si je prends mon repère sphérique, je le fais monter, je le fais descendre, je le fais tourner. D'accord ? L'orientation de mon index va être déterminée de manière cruciale par l'angle de latitude et l'angle complémentaire à l'angle de longitude. Non, c'était le contraire. L'angle complémentaire à l'angle de latitude est l'angle de longitude par les angles nodales Theta et azimutale Phi. Donc, r-chapo est ici une fonction de Theta et de Phi. Donc, tout va bien. Alors, c'est maintenant qu'on va devoir attacher nos ceintures puisqu'on aimerait trouver le vecteur vitesse. Théoriquement, c'est simple. Il n'y a qu'à dériver le vecteur position. Pratiquement, c'est un petit peu plus compliqué parce que, regardez la structure qu'on a. On doit dériver les membres de gauche et donc on doit dériver les membres de droite. Et c'est là que le bas blesse. D'accord ? Les vecteurs unitaires, ils sont constants. On n'a pas besoin de dériver. En revanche, on a en facteur devant les vecteurs unitaires des produits de fonction trigonométrique d'angles qui sont eux-mêmes des fonctions du temps. Et on doit dériver par rapport au temps. Alors, comment faire pour le faire de manière systématique sans se tremper ? Il y a une technique, c'est qu'on

notes

résumé

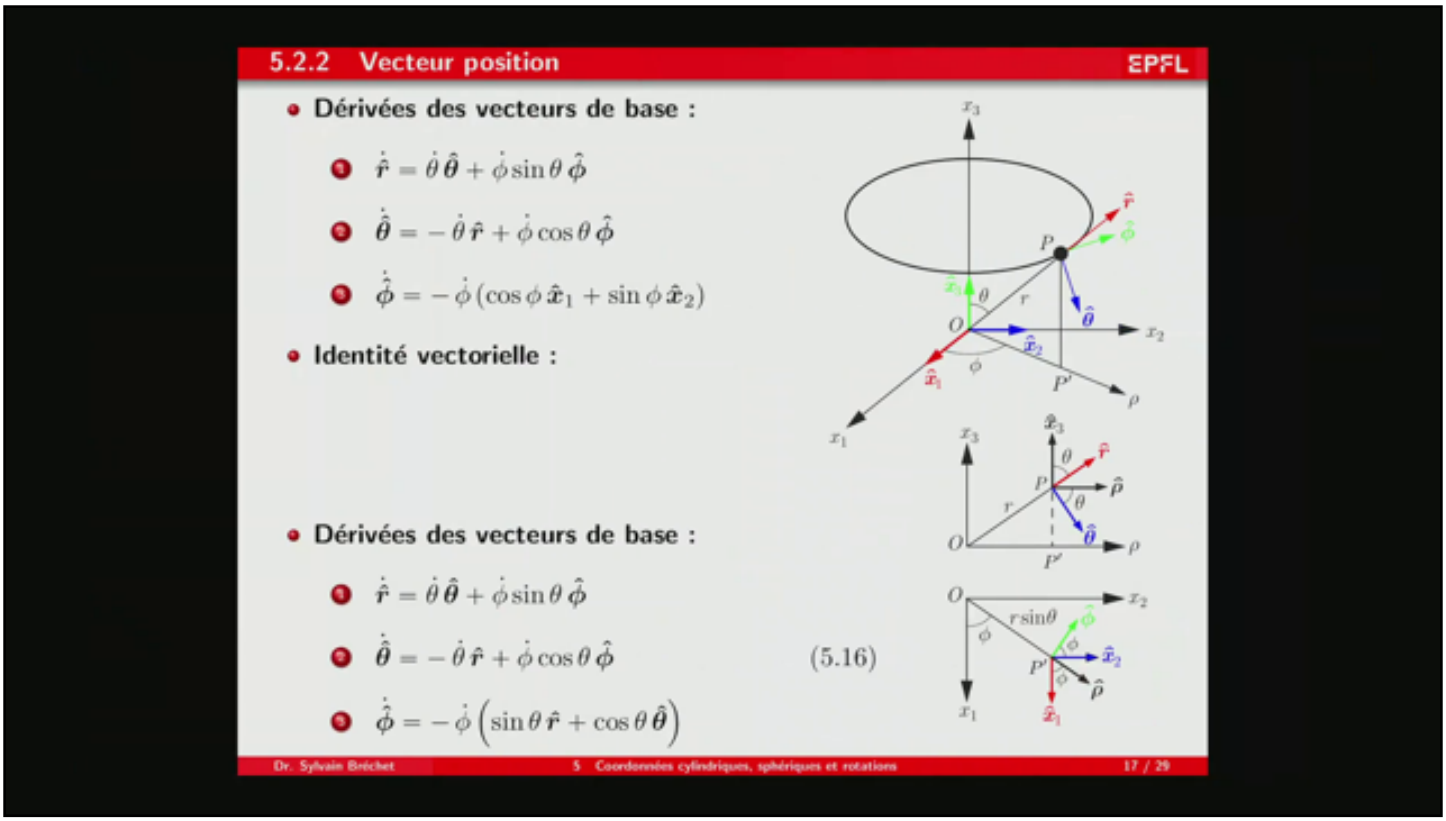
66m 37s



considère la variation au cours du temps lorsque Theta varie et on maintient Phi constant dans un premier temps. Et ensuite, on fait le contraire. On maintient Theta constant et on fait varier Phi. C'est ce qu'on va faire. D'accord ? Alors, commençons avec le vecteur unitaire, AirChapo, dont on calcule la dérivée temporelle. Alors, dans un premier temps, le cos de Phi, le signe de Phi, on va les maintenir constants. Donc, on fait varier quoi ? Le sinus de Theta 1 ici et là, ainsi que le cosinus de Theta ici. D'accord ? On aura la dérivée externe qui est la dérivée de longues Theta par rapport à Theta, et la dérivée interne qui est la dérivée de longues Theta par rapport au temps, qui est un Theta point. Cette dérivée interne, on va la mettre en évidence. On aura donc Theta point. Ensuite, la dérivée du sinus par rapport à l'angle, c'est le cosinus. Et donc, pour le premier terme, on aura le cosinus de Theta. Faut que le cosinus de Phi, faut que c'est un chapeau. Évidemment que pour le deuxième, on aura le cosinus de Theta, de nouveau. Et maintenant, le sinus de Phi, faut que c'est deux chapeaux. Et puis, la dérivée du cosinus de l'angle par rapport à l'angle, c'est l'opposé du sinus. On aura donc moins le sinus de Theta, faut que c'est trois chapeaux. Ok ? Ce qu'on a fait en faisant varier Theta, on va maintenant le faire en faisant varier Phi, en maintien Theta constant. D'accord ? Si on fait varier Phi, la dérivée interne, ce sera la dérivée temporelle de Phi. C'est un Phi point qu'on va mettre en évidence. Alors, faisons-le, mettons Phi point en évidence. Et soyons un tout petit peu observateur, regardons les trois termes. Le dernier d'entre eux ne dépend pas de Phi. On n'en tient pas compte. D'accord ? Les deux précédents ont

notes

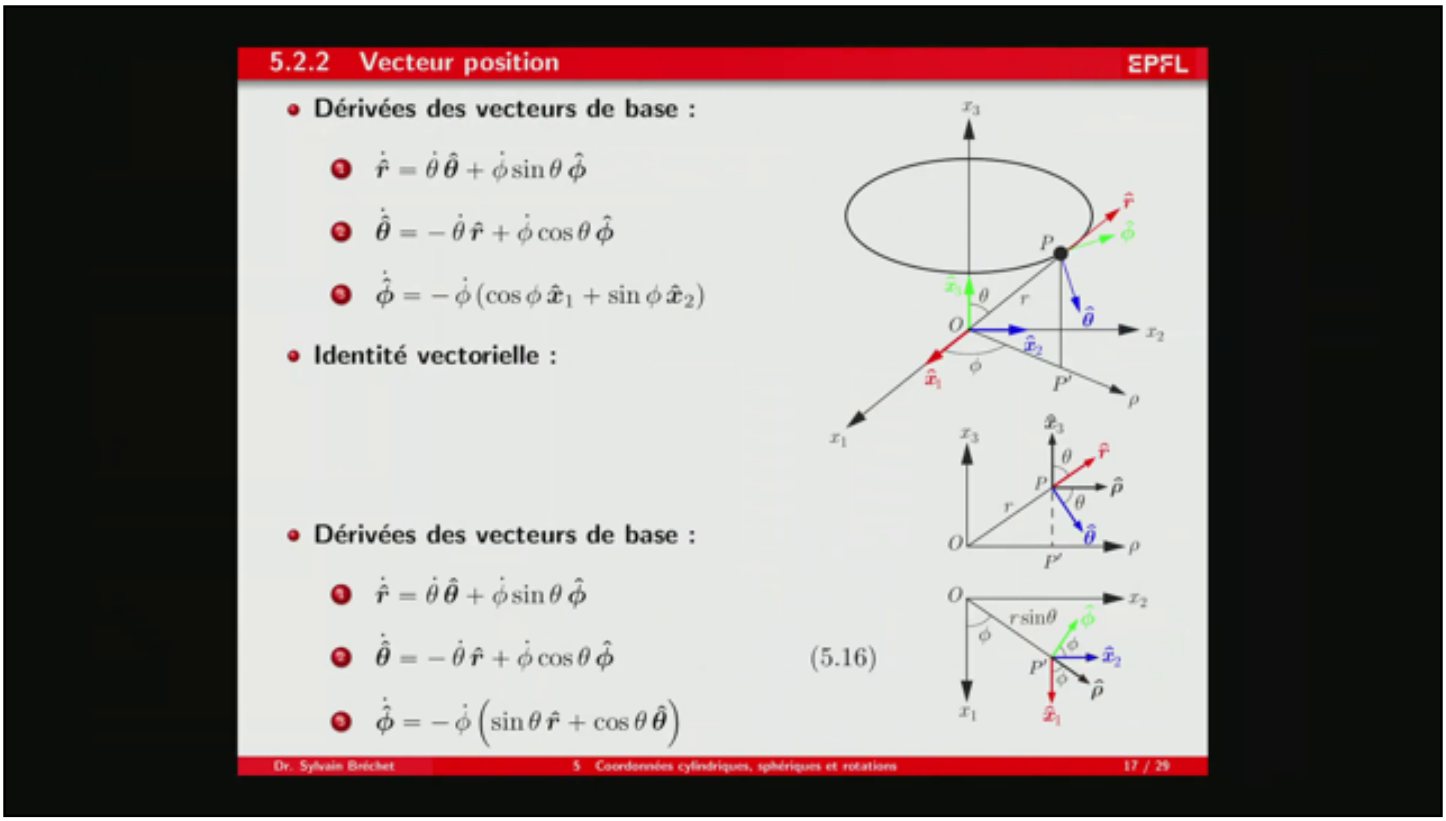
résumé



comme préfacteur un sinus de Theta. Donc, on va mettre ce préfacteur en évidence, on aura un sinus de Theta. Et donc, on devra dériver, sa dérivée externe, dériver le Cossinus et le Sinus de Phi par rapport à Phi. La dérivée du Cossinus Saint sera moins le Sinus de Phi, il faut avec ce un chapeau. Et ensuite, on aura la dérivée du Sinus qui sera le Cossinus de Phi, il faut avec ce deux chapeaux. D'accord ? Et ça, aux surprises, ça a une forme plus simple qu'on aurait pu l'imaginer. Regardons bien. Saint, c'est ça. Donc, on se retrouve entre parenthèses sur la première ligne avec le vecteur unitaire Theta-chapeau. Et les termes entre parenthèses ici se retrouvent là, c'est Phi-chapeau. On a donc Theta.xTheta-chapeau plus Phi.xSinus-Thetax Phi-chapeau. Quand vous prenez le repère sphérique, que vous le faites tourner dans n'importe quelle direction, dans un plan vertical, ainsi que dans un plan horizontal, ce qu'on est en train d'affirmer ici, c'est que le changement d'orientation du vecteur unitaire radial va se faire dans un plan qui est orthogonal à R-chapeau, qui est engendré par les vecteurs unitaires Theta-chapeau et Phi-chapeau. Voilà pourquoi on a cette structure, parce que R-chapeau est unitaire et que sa dérivé temporelle ne peut pas être le long de R-chapeau. Ok ? Bon, faisons le même exercice maintenant avec Theta-chapeau, on va le dériver par rapport au temps. C'est la même idée. Ok ? Donc on dérive d'abord par rapport à Theta, en maintenant Phi-constant, puis ensuite on fera le contraire. Pour la dérivé par rapport à Theta, on met un Theta-point en évidence et au passage on va glisser un signe moins. Ça sera utile dans quelques instants. On aura ensuite la dérivé externe du cosine de Theta par rapport à Theta, ou plutôt de moins le cosine de Theta par rapport à Theta, qui va nous donner le sinus de Theta.

notes

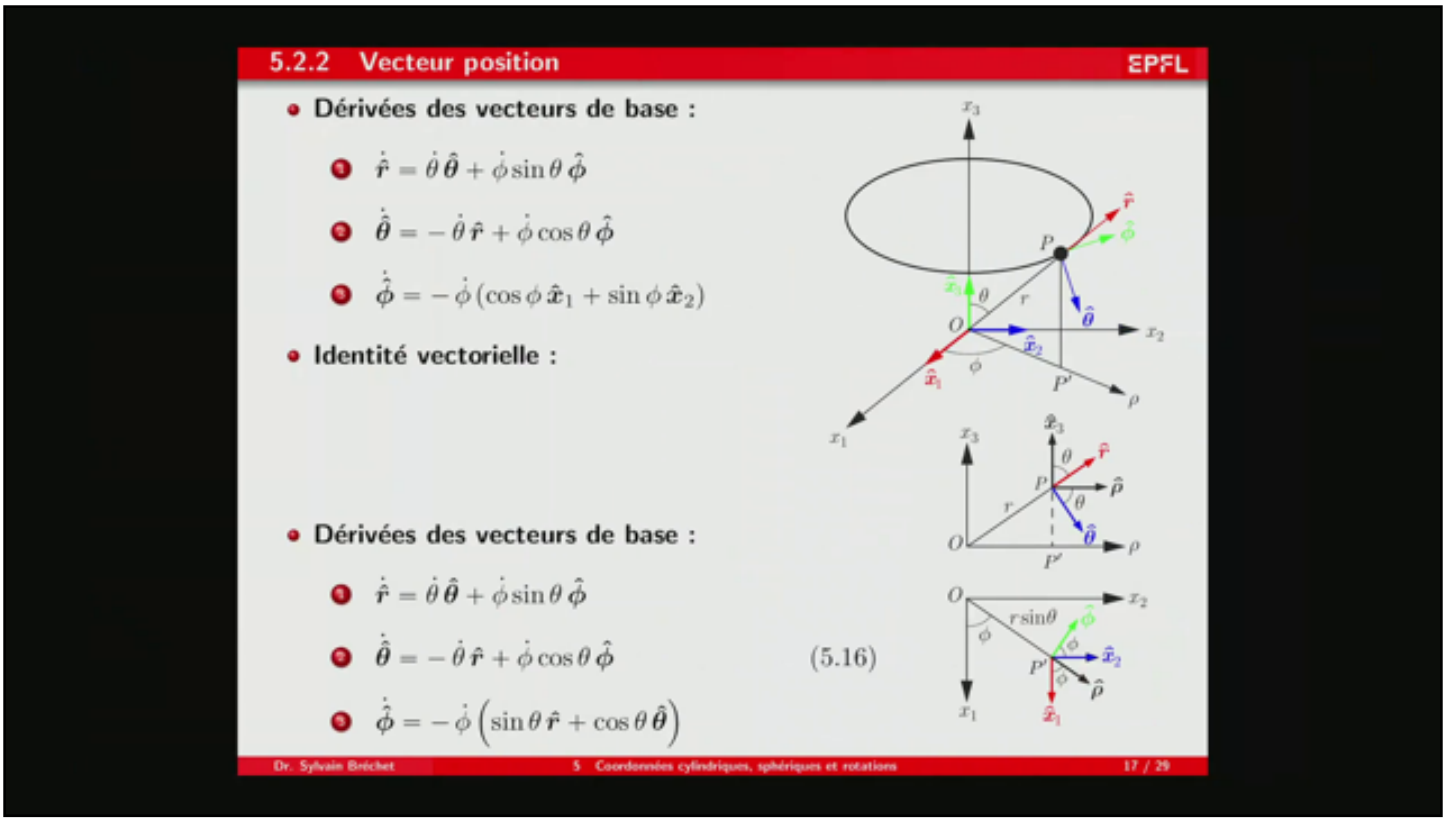
résumé



On aura le cosine de Phi, Phi-chapeau. Ensuite, on se retrouve avec un terme similaire, on a de nouveau le sinus de Theta, mais maintenant on a le sinus de Phi, Phi-chapeau. Et pour dernier terme, la dérivé du sinus de Theta, ce sera le cosine de Theta, donc on aura le cosine de Theta, fois que ce trois-chapeau. Dérivons maintenant par rapport à l'angle Phi, en dérivant par rapport au temps. Donc on maintient Theta-constant. Si on maintient Theta-constant, le dernier terme ne contribuera pas. C'est les deux premiers qui contribuent. La dérivé interne, c'est le Phi-point. Et si on prend les deux premiers termes, on voit qu'on a comme facteur constant, donc exprimé en termes de Theta, le cosine de Theta qu'on peut mettre en évidence. Faisons-le. Et donc il nous reste à dériver par rapport à Phi, le cosine de Theta, c'est le sinus. On va donc se retrouver avec moins le sinus de Phi, fois que ce trois-chapeau, plus le cosine de Phi, fois que ce deux-chapeau, et sans sa structure assez simple, puisque les termes entre parenthèses qui sont ici correspondent au premier vecteur unitaire. On a donc moins Theta-point, fois R-chapeau. Ensuite, on se retrouve avec Phi-point, cosine de Theta, et ceci, c'est Phi-chapeau. Comme avant. Donc là, on voit qu'on a fait une projection sur le plan horizontal pour se retrouver sur le vecteur unitaire, Phi-chapeau, une fois avec un cosine, une fois avec un sinus. Et puis sinon, pour aller de R-chapeau vers Theta-chapeau, on fait une rotation dans le plan vertical, dans le sens de Theta-croissant. Donc on a une vitesse angulaire qui est un Theta-point. D'accord ? Alors que pour aller de Theta-chapeau vers R-chapeau, c'est dans le sens de Theta-décroissant. On aura donc un moins Theta-point qui apparaît ici en facteur. Il nous reste à calculer la dérivé temporelle du dernier vecteur unitaire qui est Phi-chapeau. Alors ça, c'est

notes

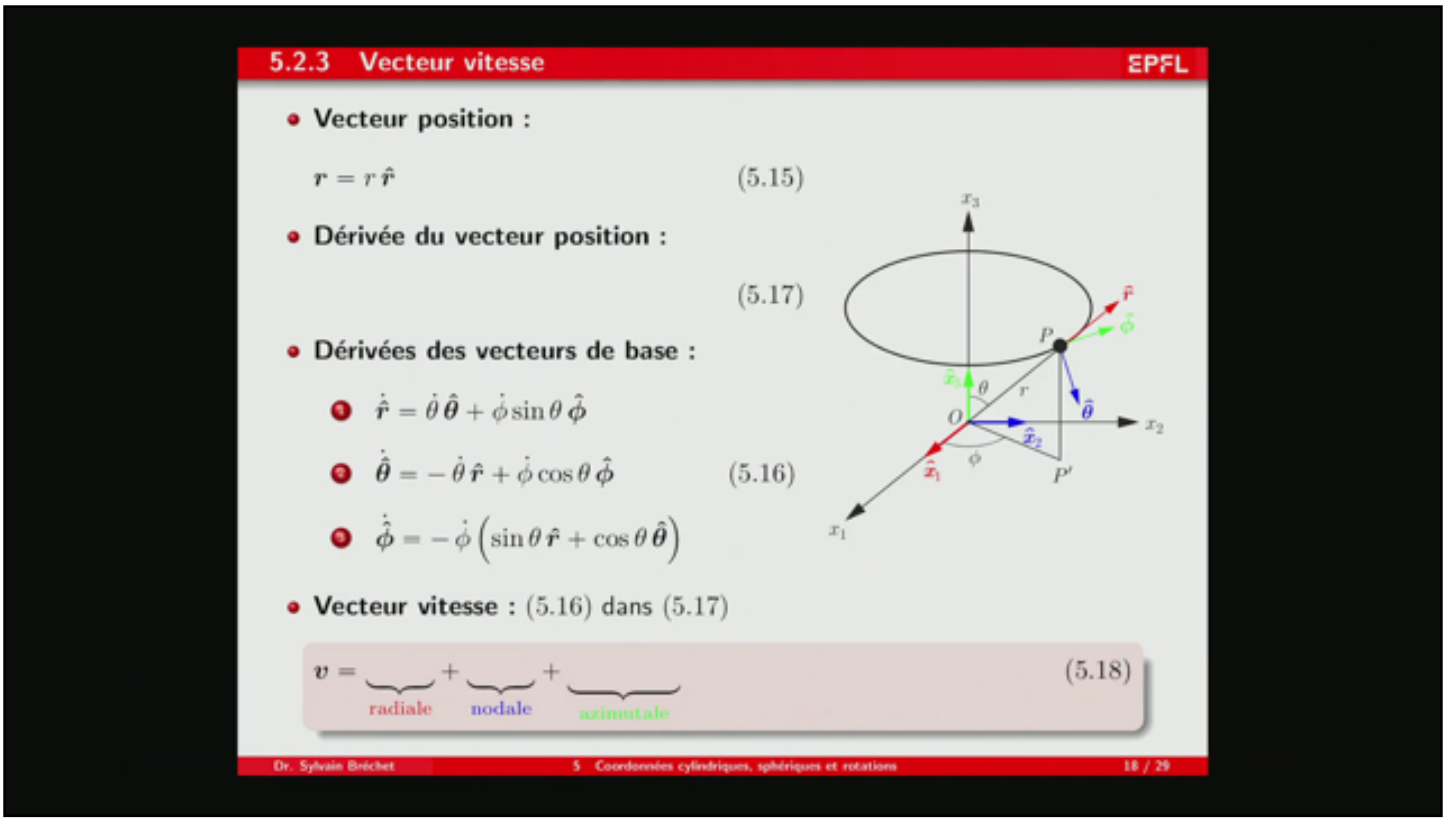
résumé



beaucoup plus simple parce qu'il y a une dépendance uniquement en Phi. Bon. Alors on va placer un signe moins en évidence. La dérivé interne sera un Phi-point. Il nous reste donc à dériver par rapport à Phi, le sinus de Phi qui nous donne le cosineus de Phi, fois X1-chapeau. Et on dérive maintenant l'opposé du cosineus de Phi, par rapport à Phi qui nous donne le sinus de Phi, fois X2-chapeau. Et là, on est embêté. Pourquoi ? Parce que les termes entre parenthèses qui sont ici, bah ils apparaissent nulle part là. Donc il va falloir qu'on travaille un tout petit peu pour la remise en forme de la dérivé temporelle de ce vecteur unitaire.

notes

résumé



Alors récrivons-le vite. La dérivé temporelle de Phi-chapeau, Phi-chapeau. C'est donc moins Phi-point qui multiplie le cosineus de Phi, fois X1-chapeau, plus le sinus de Phi, fois X2-chapeau. Bon, plaçons-nous dans le plan horizontal qui contient l'origine. X1-chapeau et X2-chapeau sont là. On a un angle Phi qui est ici. Et si on essayait de projeter le vecteur gros-chapeau, le long de X1-chapeau ça donnerait le cosineus de Phi et il faut X1-chapeau. Et le long de X2-chapeau ça donnerait le cosineus de Phi, fois X2-chapeau. Et donc les termes entre parenthèses correspondent à Ro-chapeau. C'est moins Phi-point fois Ro-chapeau. Oui mais Ro-chapeau, c'est pas le vecteur qu'on veut. Nous on veut une combinaison linéaire des vecteurs unitaires du repère sphérique. Donc il faut se placer maintenant dans l'autre plan, le plan vertical radial. Et donc il faut exprimer en composante le vecteur gros-chapeau dans le repère sphérique. Donc on va le projeter selon R-chapeau et Phi-chapeau. On aura donc moins Phi-point qui multiplie le sinus de theta fois R-chapeau plus le cosineus de theta fois theta-chapeau. Et le tour est joué. On a obtenu les dérivés temporels des vecteurs unitaires du repère sphérique comme combinaison linéaire de ces mêmes vecteurs unitaires. Donc on l'a exprimé dans la bas sphérique. Donc maintenant on va pouvoir faire de la cinématique. D'accord ?

notes

résumé

75m 56s

5.2.4 Vecteur accélération

EPFL

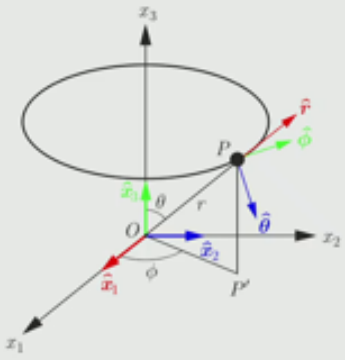
- **Vecteur vitesse :**

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\hat{\boldsymbol{r}} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\dot{\phi}\,\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (5.18)$$

- **Dérivée du vecteur vitesse :**

$$\dot{\vec{V}} = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \ldots$$

(5.19)



- **Dérivées des vecteurs de base :**

1. $\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$
2. $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ (5.16)
3. $\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = -\dot{\phi}\left(\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$

Dr. Sylvain Bréchet — 5 Coordonnées cylindriques, sphériques et rotations — 19 / 29

notes

résumé

77m 41s

5.2.4 Vecteur accélération

EPFL

- **Vecteur vitesse :**

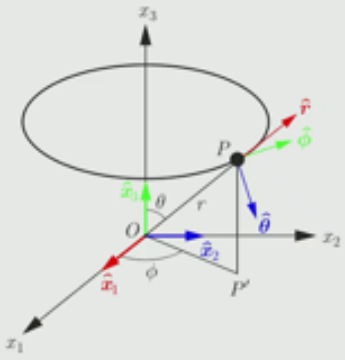
$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\hat{\boldsymbol{r}} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\dot{\phi}\,\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad (5.18)$$

- **Dérivée du vecteur vitesse :**

$$\dot{\vec{V}} = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \ldots \qquad (5.19)$$

- **Dérivées des vecteurs de base :**

1. $\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$
2. $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ (5.16)
3. $\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = -\dot{\phi}\left(\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$

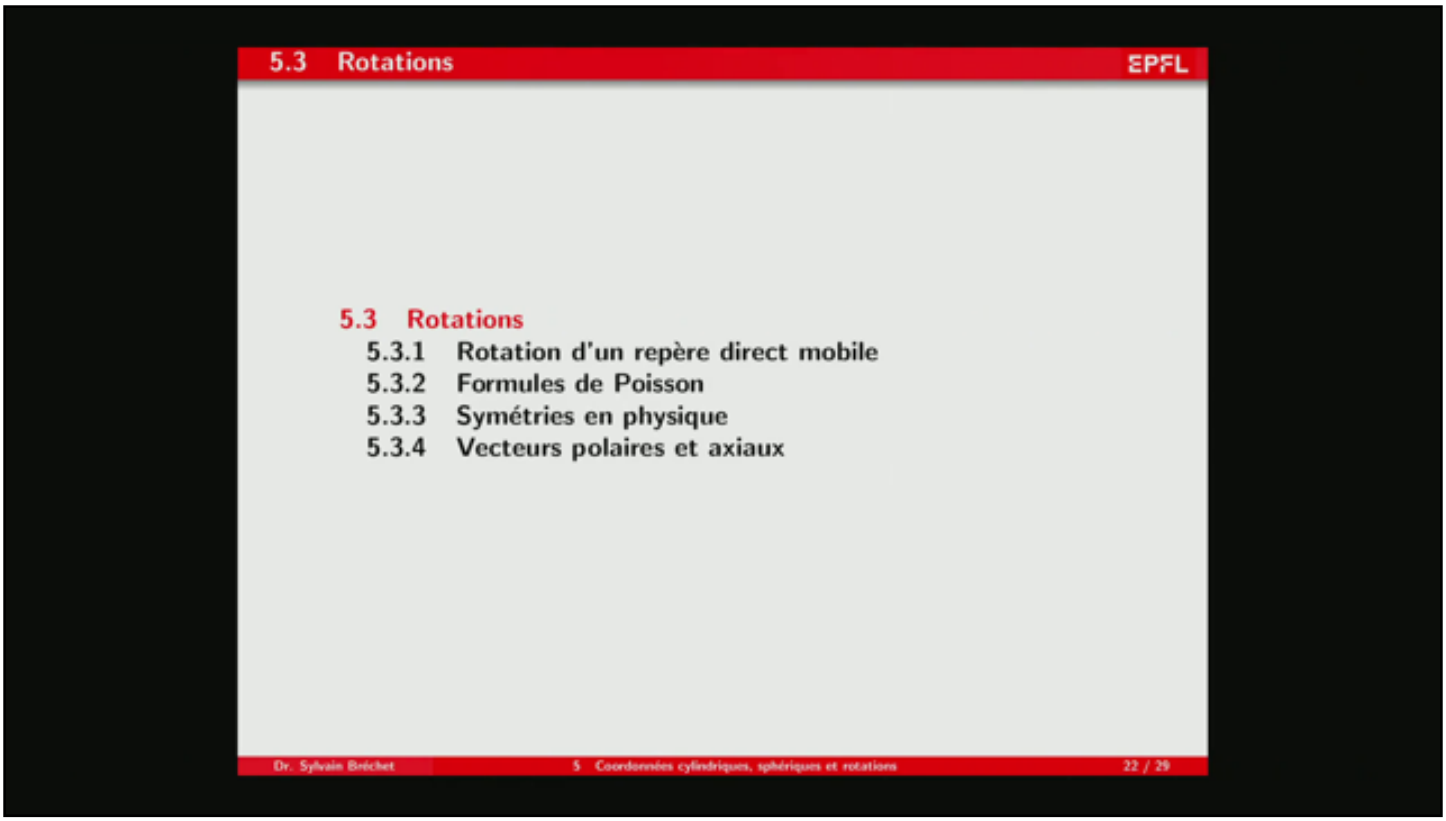


Dr. Sylvain Bréchet — 5 Coordonnées cylindriques, sphériques et rotations — 19 / 29

fi, dans le plan risontal. D'accord ? Et puis, évidemment, selon le vecteur militaire, fi-chapo. Ça, c'est la vitesse azimutale. Donc on a la vitesse tangentiale dans le plan vertical, qui est la vitesse nodale. La vitesse tangentiale dans le plan horizontal, qui est la vitesse azimutale. Et on a la vitesse radial. Voilà nos trois composants de la vitesse. Alors, maintenant, si vous le voulez bien, peut-être que vous le voulez pas, mais on le fera quand même, on va déterminer l'accélération. D'accord ? Pour trouver l'accélération, on devra dériver par rapport au temps le vecteur vitesse. Attention, c'est pas simple. Il y a beaucoup de termes. D'accord ? Mais à la fin, on va pouvoir les interpréter, et ils auront tous un sens. Bon. Dérivons donc par rapport au temps le vecteur vitesse V. On va donc dériver par rapport au temps les trois termes qui sont là. Commençons par le premier. On dérive par rapport au temps la composante. On a R. . FI-CHAPO. On dérive le vecteur unitaire. On a R. FI-CHAPO. Maintenant, dérivons la deuxième composante, le R. TETA.

notes

résumé

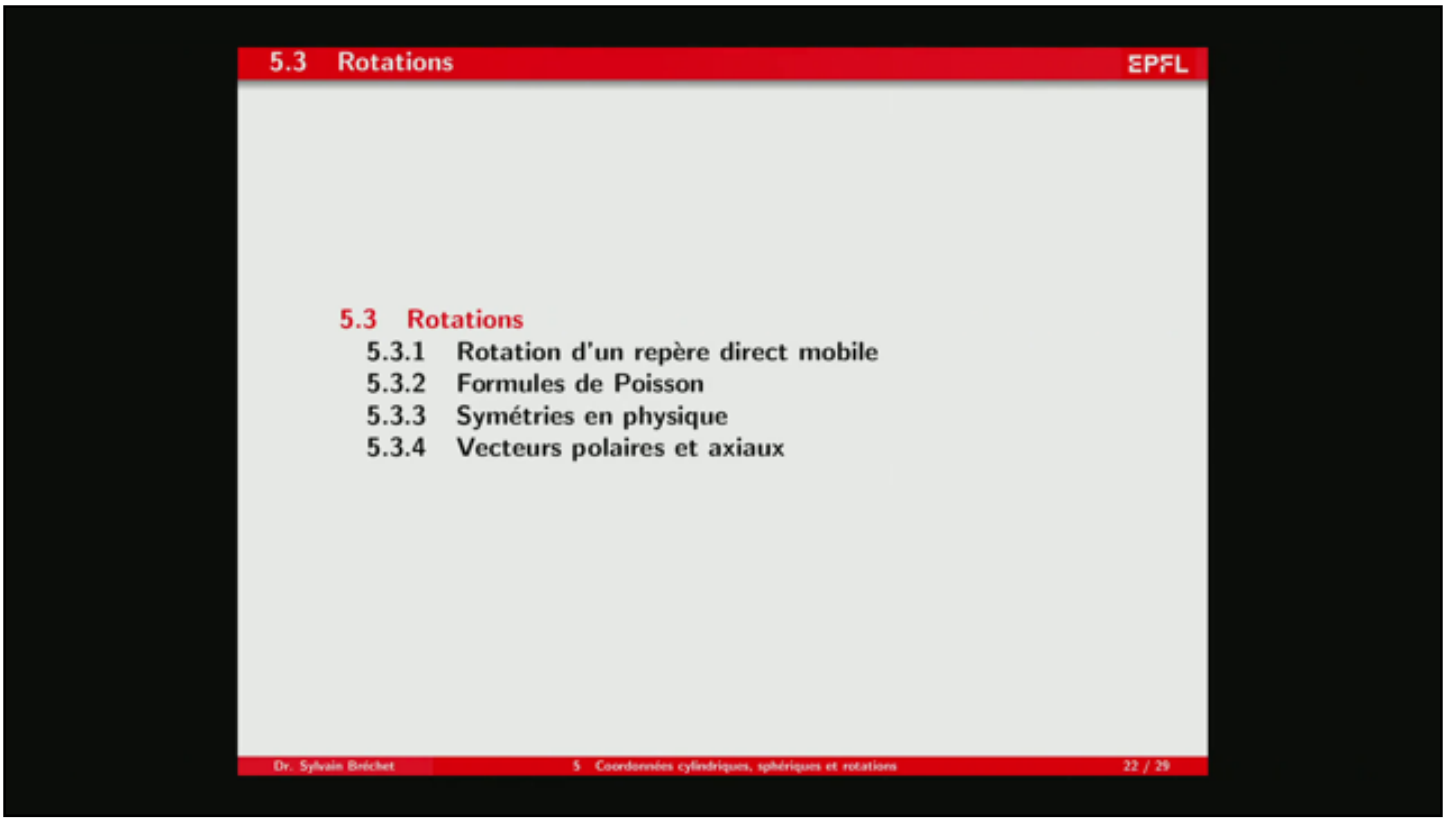


On aura donc R. TETA. Et ensuite, R. TETA. Qui multiplie TETA. Attention, il ne faut pas oublier de dériver par rapport au temps le vecteur unitaire. On aura la composante R. TETA. FI-TETA. Maintenant, dérivons par rapport au temps le troisième terme. Commençons par dériver par rapport au temps le produit de ces trois grandeurs qui toutes dépendent du temps. Comment est-ce qu'on dérive le produit de FI-GFI-H ? C'est la dérivée de G. De FI-GFI-H. Plus FI-GFI-H. Plus FI-GFI-GFI-H. Il y a trois termes. On te retrouve avec la dérivée temporelle de R, qui est R. FI-FI-POIN. FI-TETA. On a ensuite R. FI-TETA. FI-FI-POIN, qui est FI-POIN-POIN. FI-TETA. Et maintenant, attention. On a R. FI-POIN. Et on doit dériver par rapport au temps le sinus de TETA c'est-à-dire qu'on aura le cosius de theta x theta point. Donc on a theta point x cosius de theta, d'accord ? Le tout x fichapo. Et il ne faut pas oublier de dériver fichapo lui-même par rapport au temps, ce qui va nous donner r, fi point, sinus theta x fichapo point. Alors quand on est arrivé là, il faut jouer de nouveau au Lego, en prenant nos briques qui sont ici et en les substituant là-dedans. D'accord ? On a un grand nombre de termes et ces termes, il faut les rassembler. Ok ? Alors là, pour le coup, je ne vous épargne les détails de tout ce calcul et je vous donne le résultat final qu'on va interpréter. D'accord ? Le vecteur accélération a sera le suivant. C'est r point point, moins r, theta point carré, moins r, fi point carré, sinus carré, theta, le tout x r chapeau. Plus r theta point point, plus 2 r points theta point, moins r, fi point carré, sinus theta, co sinus theta, fois theta chapeau, c'est pas terminé, le dernier est le plus compliqué. On se retrouve avec r fi point

notes

résumé

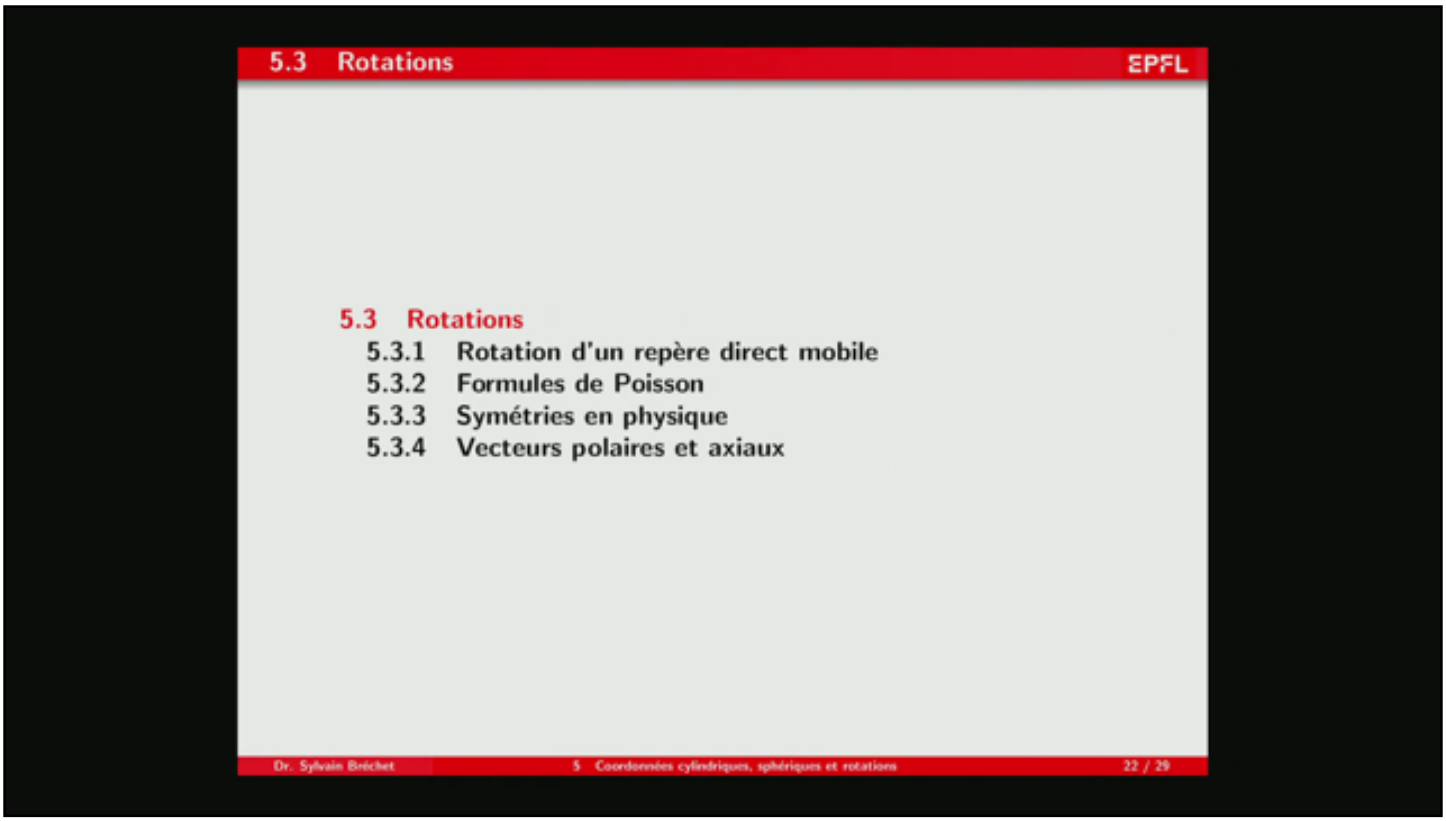
81m 13s



point, sinus, il y a 2 points, fi point point, sinus theta, plus 2 r points fi point, sinus theta, plus 2 r, fi point, theta point, co sinus theta, fois fi chapeau. Je vous promets, il n'y en a pas un de plus. D'accord ? Il y en a déjà neuf de termes. Alors vous allez me dire, c'est très compliqué, oui c'est assez compliqué, mais ça reflète des symétries complètement générales. Dans la pratique, lorsque vous avez un problème de physique à résoudre, un problème de mécanique, vous allez avoir quelques-uns de ces termes qui sont non nuls. 3, 4, voire 5, d'accord ? Vous n'aurez jamais les neufs, rassurez-vous. Alors maintenant, on va les interpréter ensemble. Qu'est-ce qu'il signifie ? Alors, ou plutôt, il y a un souci ? Attendez, merci. Oui, c'est le slide qui doit vraiment rester à l'écran. Vérifiez bien que je n'ai pas fait d'erreur par rapport au slide, que je vous donnerai plus tard ou par rapport au bouquin, d'accord ? Et si vous avez des formulaires que vous utilisez, enfin, à l'examen, je vous donnerai ces formules-là, ces formules-là doivent être par balles, il ne doit pas y avoir d'erreur, d'accord ? Ni sur les angles, ni sur les points. Il y a des points partout, il y a des angles partout, il y a des têtes à défis, tout se croise, d'accord ? Il faut être très prudent. Alors quand on comprend le sens physique, on se rend compte si on s'est trompé ou pas. Ça c'est déjà un avantage. Quel sens physique ? Ok. Allons-y gentiment. Ou plutôt, comme l'heure tourne, on fera ceci tout à l'heure. Alors, est-ce que Quentin est dans la salle ? Pas encore. Il arrivera, si jamais je lui et je ferai appel à lui au début de l'heure prochaine. Il y a encore une demande qui m'avait été faite par rapport... Je peux

notes

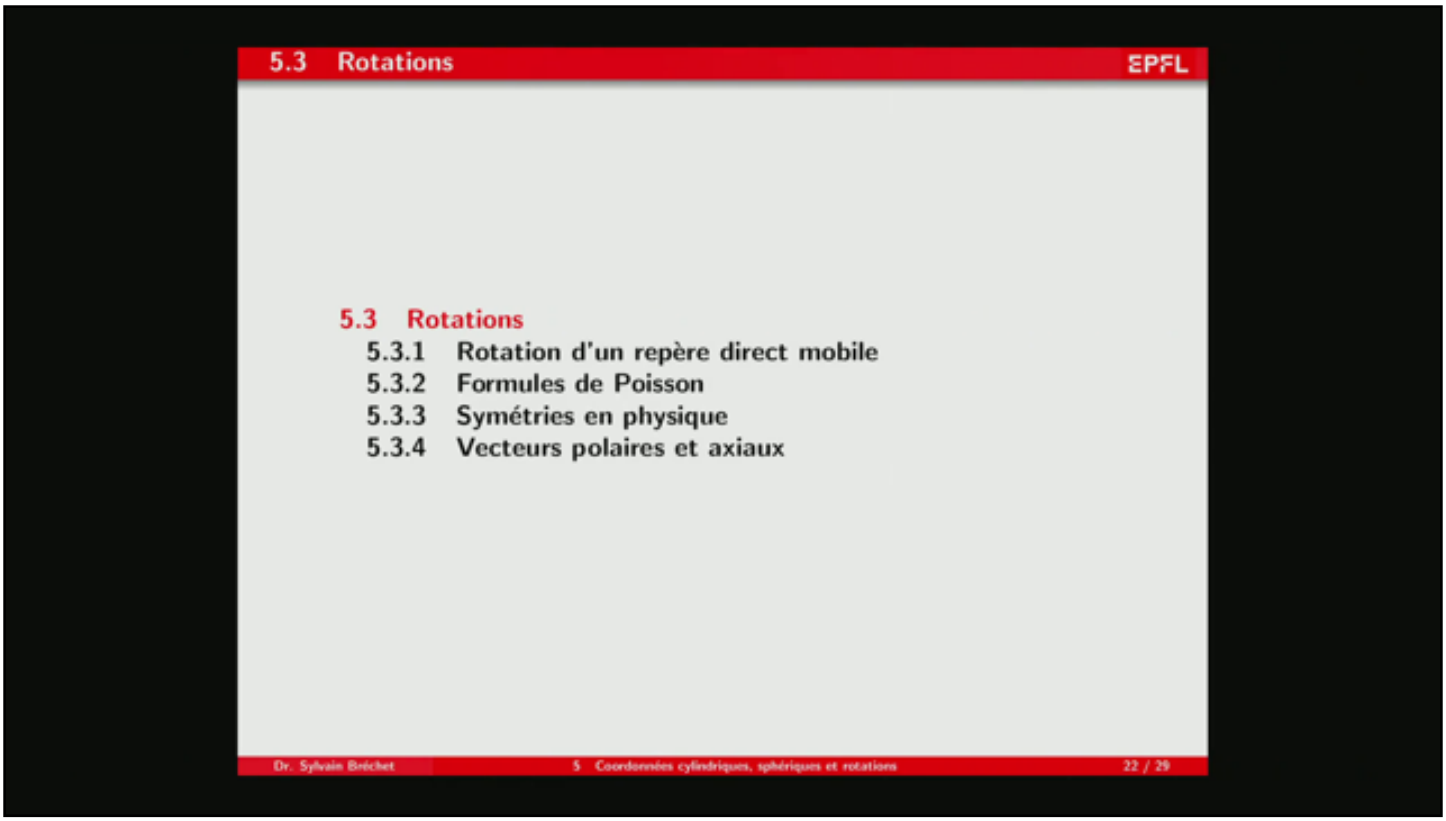
résumé



pas passer la parole là ? Voilà. Bonjour. En fait, c'était juste pour... parce que j'ai remarqué que pour les retours indicatifs, il n'y a pas beaucoup de taux de participation alors que c'est hyper important pour que notre section, bah, elle remporte les 500 francs qui iront à SQFD. Donc, s'il vous plaît, est-ce que vous pouvez juste, tous, vous connectez à IES Academy, là, tout de suite, et faire vos retours indicatifs, c'est possible. Merci beaucoup. Merci. Donc, j'aimerais rebondir sur ce qui vient d'être dit. C'est effectivement très important d'avoir des retours indicatifs. Les retours doivent être constructifs, d'accord ? Donc dire le court est nul ou le court est génial, c'est pas constructif. C'est bien vraiment de mettre des remarques par rapport à ce que vous avez apprécié, ce que vous voudriez voir fait de manière différente, etc. D'accord ? Voilà. Merci d'avance. Non seulement pour le cours de physique, mais pour tous les cours en général, c'est très utiliant. C'est très important pour les enseignants d'avoir ce retour indicatif. Merci. Voilà, comme je vous l'ai promis, il nous reste à interpréter les différents termes du vecteur accélération. On va le faire gentiment. Si le point matériel se déplace radialement de l'origine et qu'il est accéléré, il a un mouvement rectiligne, son accélération radiale, c'est la dérivée seconde de la cordée radiale multipliée par le vecteur radial. Imaginons maintenant que ce même point matériel se déplace sur une trajectoire circulaire dans le plan vertical, sur une trajectoire circulaire de rayon R. Il aura donc une accélération centripète, qui est opposée à air chapeau, douleci de moins. La composante, c'est le produit du rayon quitter, fois la vitesse singular qui la dérivée temporelle de l'angle dans le plan vertical, soit tête à point, élevée au carré. Si il a un mouvement maintenant sur une trajectoire circulaire dans le plan horizontal, soit circulaire de rayon R sinus theta,

notes

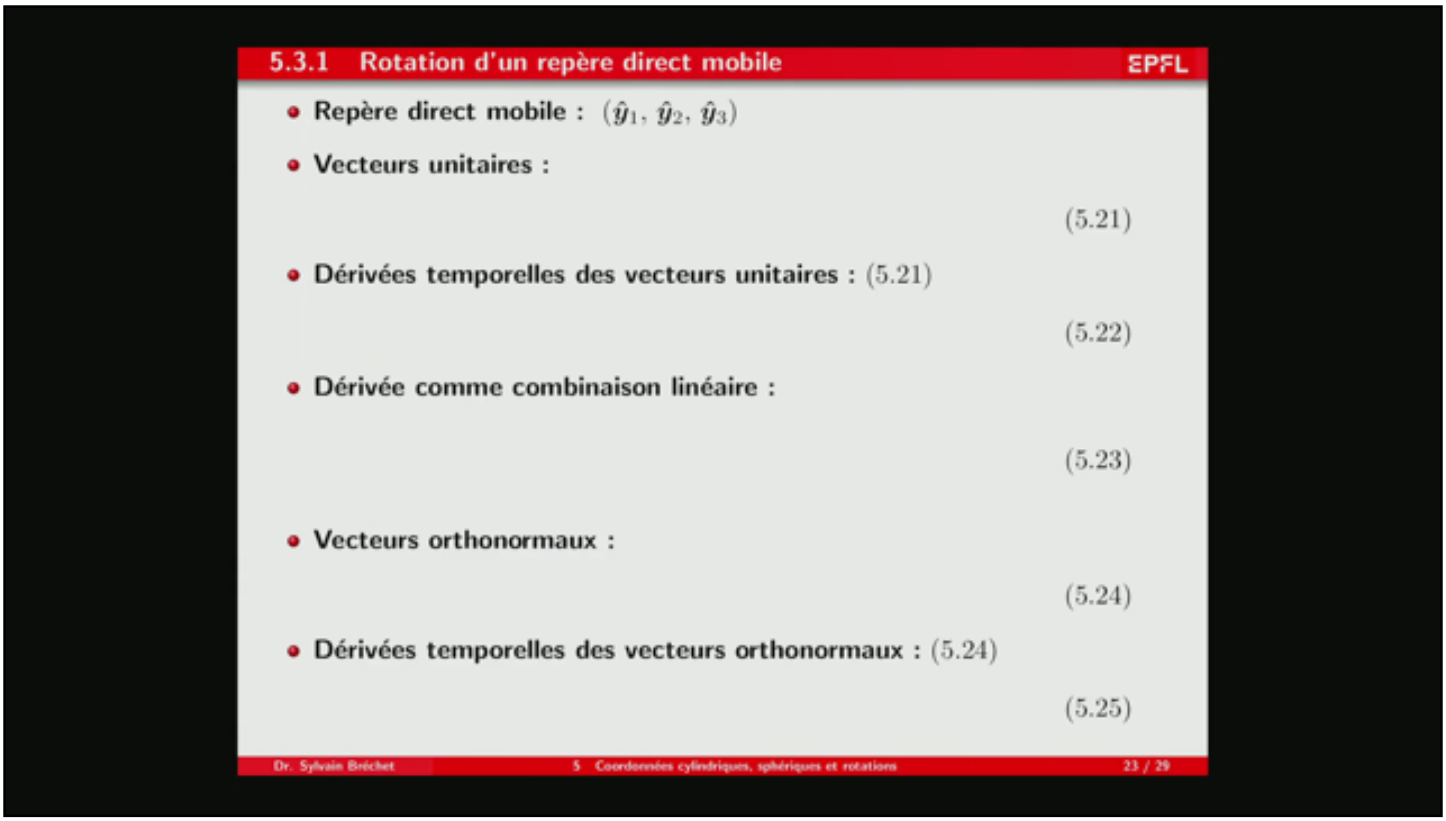
résumé



la vitesse singular sera theta point, l'accélération centripète sera moins R sinus theta, il n'y a pas le carré pour l'instant, moins R sinus theta, fois phi point carré, et comme on est en train de décrire ici une accélération centripète qui est radialement dans le plan horizontal orienté vers l'intérieur, qu'on a un vecteur qui n'est pas radial selon air chapeau, il faut encore faire une projection selon air chapeau, ce qui va faire intervenir un sinus de theta, doulecinus carré de theta, qui apparaissent. Alors, j'anticipe tout de suite, pour le même mouvement, si on projette selon theta chapeau, au lieu d'avoir un sinus, on a un co-sinus doule terme qui apparaissent. Ensuite, si on a un mouvement circulaire uniformément accéléré dans un plan vertical sur le rayon R, on a une accélération tangentiale qui est R fois theta point point, le rayon fois l'accélération annulière. On aura un terme d'accélération de coriolisse qui apparaît grâce au calcul, qui est caractérisé par un facteur 2. D'accord ? Prenons maintenant les composantes selon phi chapeau. Si on a un mouvement circulaire uniformément accéléré sur un cercle horizontal sur un rayon R sinus theta multiplié par l'accélération annulière qui est phi point point, c'est l'accélération tangentiale azimutale. Avant, on avait la nodale dans le plan vertical, on a maintenant l'azimutale dans le plan horizontal. Et il nous reste des termes compliqués d'accélération de coriolisse. Voilà donc les 9 termes qu'on obtient pour l'accélération

notes

résumé

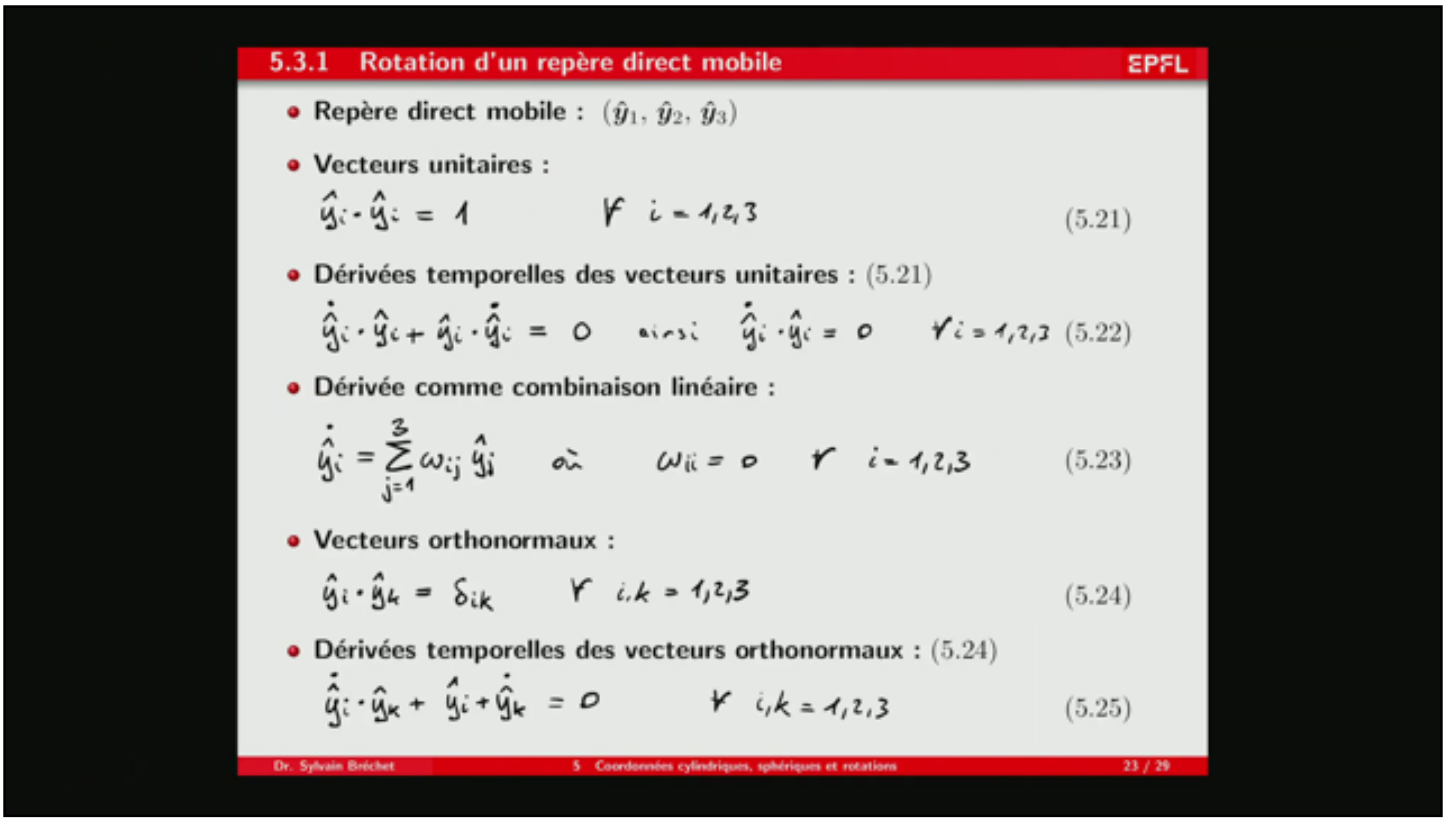


au coordonnée Earthspheric. Alors, on va maintenant établir ensemble des formules qu'on va utiliser en exercice qui permettent de calculer assez rapidement les dérivés temporels des vecteurs unitaires. On va s'intéresser à la théorie générale des rotations de repères directes mobiles. D'accord ? Qui peut être un repère cylindrique, qui peut être un repère sphérique, qui pourrait même être un repère élyptique ou un repère hyperbolique, on va parler ensemble, d'accord ? Ce serait d'autres possibilités. Mais il faut un mouvement simple. Imagine un repère qui tourne, on tourne dans un plan, tourne dans un autre plan, d'accord ? Concrètement, quand on veut décrire les rotations mathématiquement, c'est assez compliqué. Vous avez vu les applications linéaires qui envoient les vecteurs du premier repère sur les vecteurs du nouveau repère. D'accord ? Et puis, quand on veut décrire ce qui se passe au cours du temps, c'est encore plus compliqué. Alors, intuitivement, on comprend bien que si on a un mouvement circulaire dans un plan, il y aurait une orientation donnée par la règle de la main droite, et c'est ça qu'on aimerait retrouver ensemble maintenant. D'accord ? On va le faire de manière élégance, de manière mathématique. Vous allez voir qu'on arrive à établir les formules de poisson qui donnent les dérivées temporelles de ces vecteurs unitaires. D'accord ? Ensuite, on parlera de quelque chose de beaucoup plus général et d'assez intéressant. C'est même la physique du 20e siècle. On a des symétries en physique, et on verra qu'il y a deux types de vecteurs qui apparaissent en mécanique et qu'il est utile de les distinguer, les vecteurs polaires et les vecteurs axiants.

notes

résumé

89m 50s

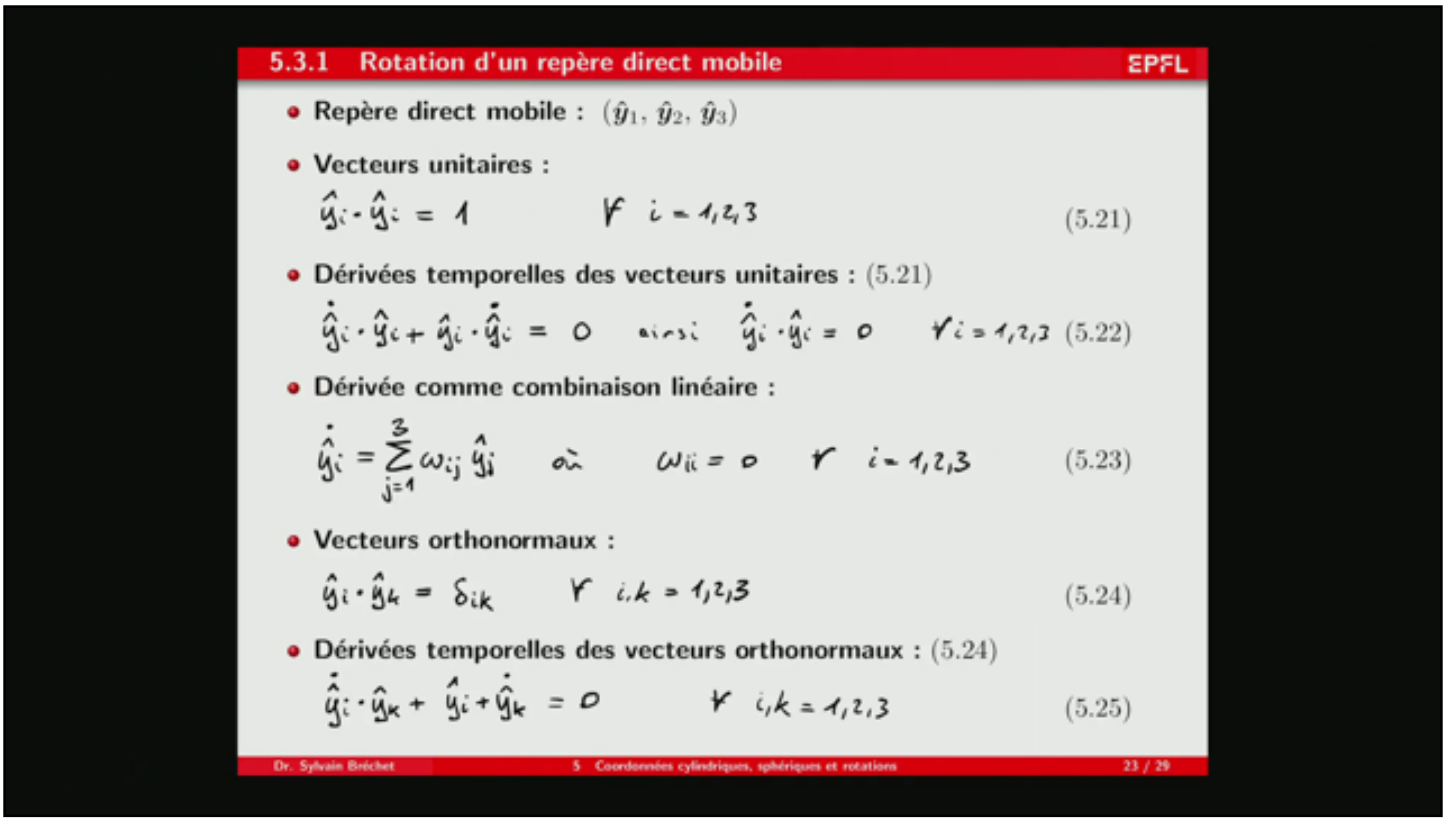


Alors, prenons un repère direct mobile quelconque. Avec 3 vecteurs unitaires Y1, Y2 et Y3 chapeaux. C'est des vecteurs unitaires. Donc, si on prend le IM vecteur unitaire YI chapeau qu'on fait le produit scalaire avec lui-même, on trouve sa norme qui vaut 1, quelle que soit l'indice I qui prend les valeurs entières de 1 jusqu'à 3. On peut donc maintenant prendre cette relation et la dériver par rapport au temps. Alors dérive-on le membre de gauche. On a le produit de 2 vecteurs. On va dériver le premier vecteur soit YI chapeau, on a YI chapeau point, produit scalaire avec YI chapeau. Ensuite, on redérive mais maintenant le deuxième vecteur. On aura donc le produit scalaire du premier YI chapeau avec la dériver temporelle du deuxième. Et dans le membre de droite, ce qu'on doit dériver c'est une constante. La dériver de 1 par rapport au temps, par rapport à autre chose c'est clairement 0. Le produit scalaire, il est commutatif. On a le droit de permuter ou de commuter les 2 vecteurs. Ce qui veut dire que les 2 contributions sont égales et donc ces contributions sont nulles. Ce qui signifie que le produit scalaire de la dériver temporelle du vecteur unitaire YI chapeau avec ce même vecteur unitaire doit être nul, quel que soit le vecteur unitaire considéré le premier le deuxième ou le troisième. C'est ce qu'on vient de voir concrètement avec des coordonnées cylindriques et sphériques. La dériver temporelle du vecteur unitaire était toujours orthogonal au vecteur unitaire. C'est ce que nous affirme la théorie générale. C'est lié justement au fait que le vecteur a un caractère unitaire et donc sa norme ne peut pas changer au cours du temps. Maintenant, la dériver temporelle du vecteur unitaire YI donc YI chapeau point on peut l'écrire de manière complètement générale comme combinaison linéaire des vecteurs unitaires de notre père. C'est un vecteur qui appartient à

notes

résumé

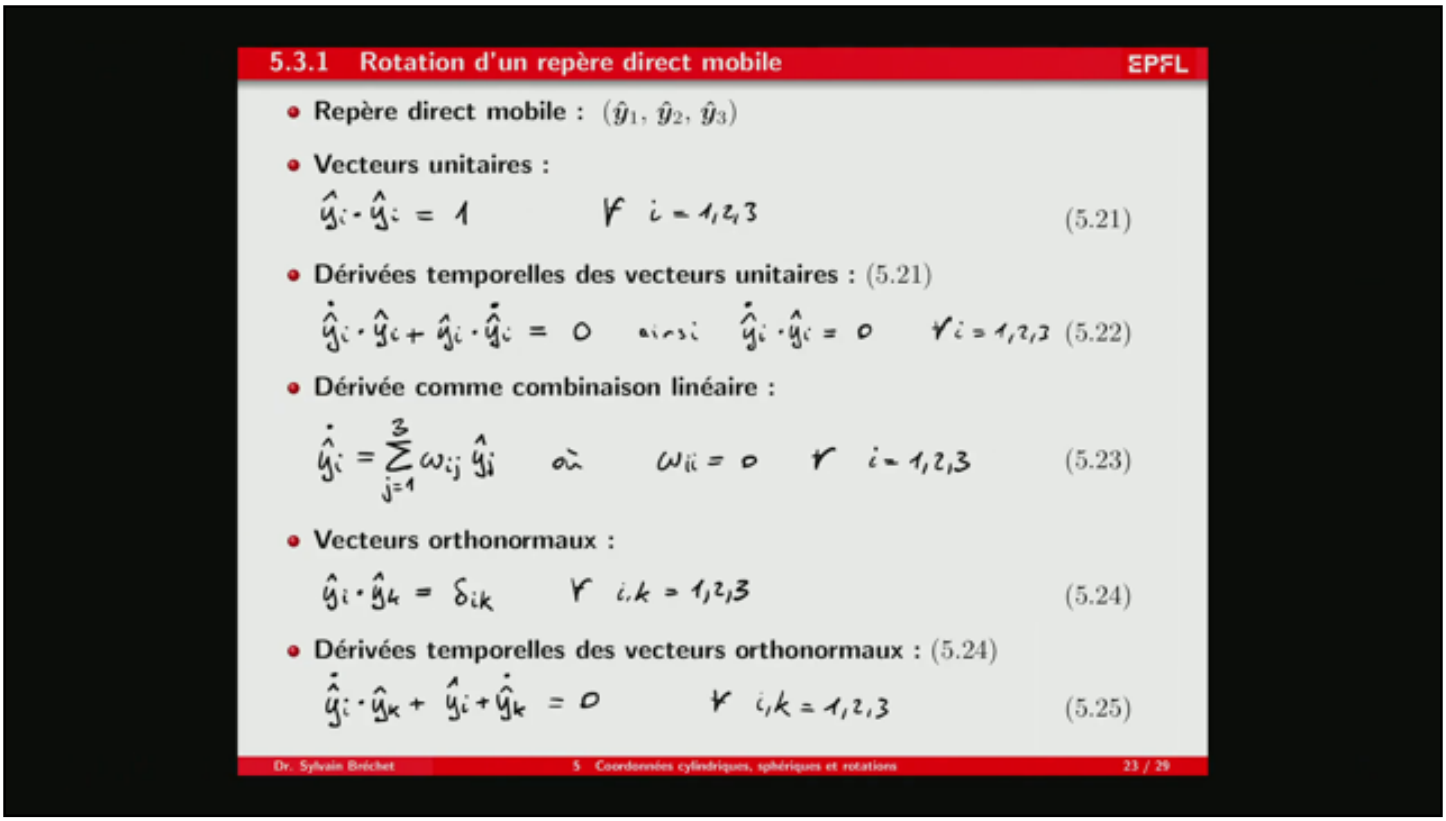
91m 29s



l'espace à 3 dimensions. Donc, ça va être une combinaison linéaire des vecteurs et donc, j'y chapeau. Alors, on va mettre des facteurs devant et volontairement, on anticipe un petit peu ces facteurs, on va leur donner la lettre omega. Alors, ils vont dépendre de quoi ? Ils vont dépendre du vecteur de départ, du I.M. vecteur dans ton calcul la dériver temporelle, mais également des vecteurs utilisés pour établir la combinaison linéaire c'est-à-dire des vecteurs YG donc on a deux indices, un indice I et un indice J. Comme c'est une combinaison linéaire on va sommer sur l'indice J qui va prendre des valeurs entières de 1 jusqu'à 3, d'autre termes pour omega I chapeau point on aura omega I1 Y1 chapeau plus omega I2 Y2 chapeau plus omega I3 Y3 chapeau d'accord ? Mais attention, qu'est-ce qu'on vient d'affirmer à la ligne d'en-dessus ? On vient d'affirmer que la dériver temporelle d'un vecteur unitaire est orthogonal à ce vecteur unitaire ce qui veut dire que le coefficient qui va multiplier le même vecteur unitaire doit être nul donc si l'indice I est égal à l'indice J le coefficient est nul ce qui veut dire que omega II est égal à 0 quel que soit l'indice I qui prend les valeurs 1, 2 ou 3 OK ? Maintenant, non seulement les vecteurs sont unitaires mais en plus ils sont orthonormaux si on prend un vecteur unitaire le IM YI chapeau qu'on fait le produit scalaire avec le KM YK chapeau le résultat sera égal à 1 si I égal K 0 sinon, puisqu'ils sont orthonormaux ce qu'on écrit grâce au symbole de cronécaire delta IK et ceci, quel que soit les indices I et K ils prennent les valeurs entières 1, 2 ou d'accord ? et on a déjà créé cette relation d'ortonormalité par rapport au temps alors on dérive le premier vecteur unitaire on a YI chapeau point

notes

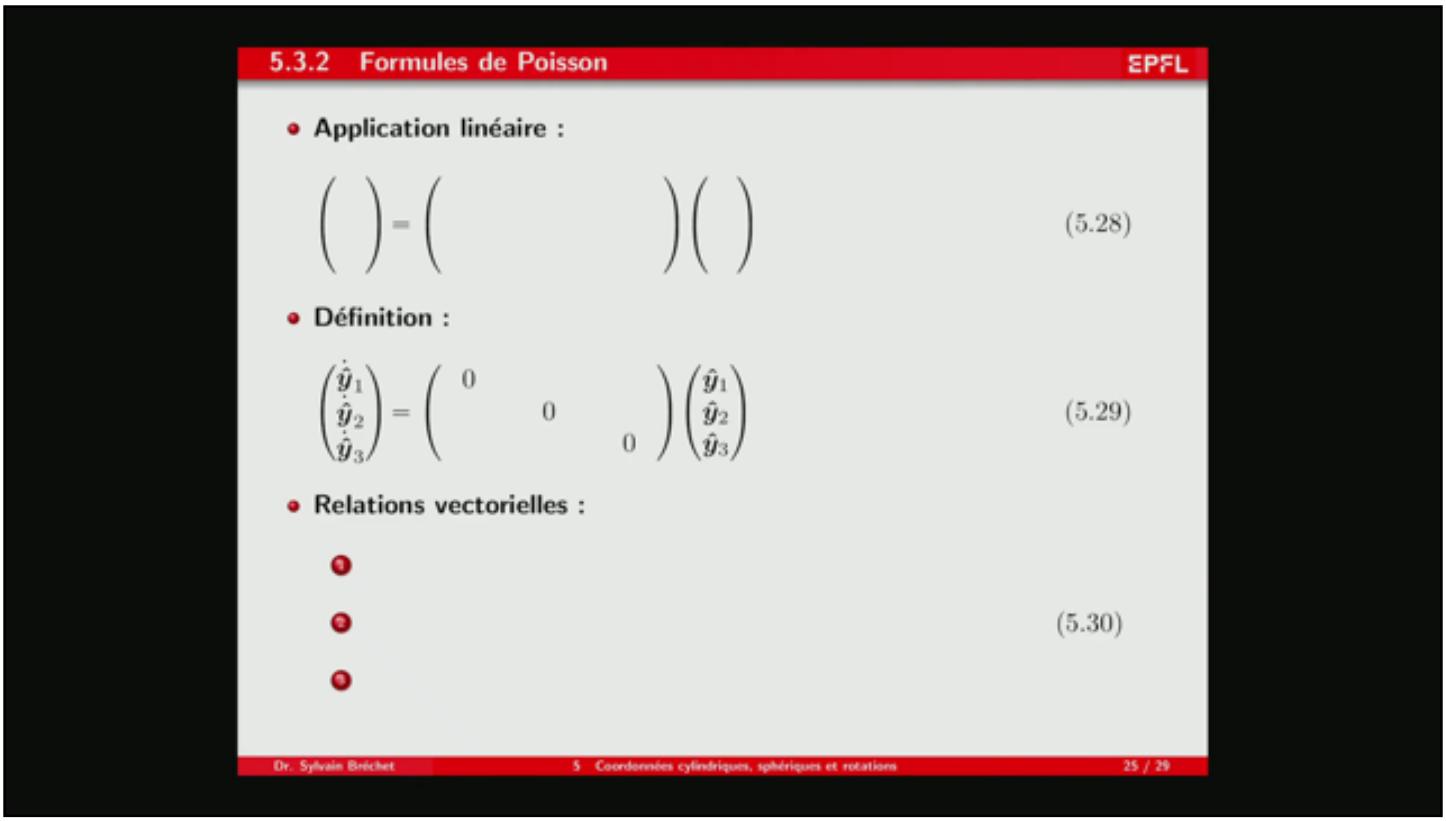
résumé



produit scalaire avec YK chapeau et on ajoute à ceci le produit scalaire de YI chapeau avec la dérivée temporelle de YK chapeau d'accord ? ceci est égal à 0 puisque la dérivée de 0 ou de 1 la dérivée du symbole de cronécaire d'accord ? ceci, quel que soit les indices I et K qui prennent les valeurs entières 1 à 3 bon, partant de là, qu'est ce qu'on peut faire ? et bien, une bonne idée serait de prendre l'expression en termes de combinaison linéaire des vecteurs unitaires de la dérivée temporelle d'un vecteur unitaire et de la substituer à l'intérieur de la dérivée de la relation d'ortonormalité qu'on vient de calculer d'accord ? faisons-le donc on sait que YI chapeau point c'est la somme sur l'indice J qui prend les valeurs entières de 1 à 3 de omega Ij Yj chapeau donc on doit prendre le produit scalaire avec YK chapeau on a ensuite YI chapeau et on prend le produit scalaire avec YK chapeau alors YK chapeau on peut l'écrire de la même manière que YI chapeau et on remplace simplement le Y par un K oui alors dans la 5 et 25 on a remplacé alors là on a volontairement pris un Y et un K qui sont différents et puis il y a erreur quelque part et quelque chose que j'ai oublié ou bien ah pardon c'est un oui oui non bien sûr c'est un foie

notes

résumé

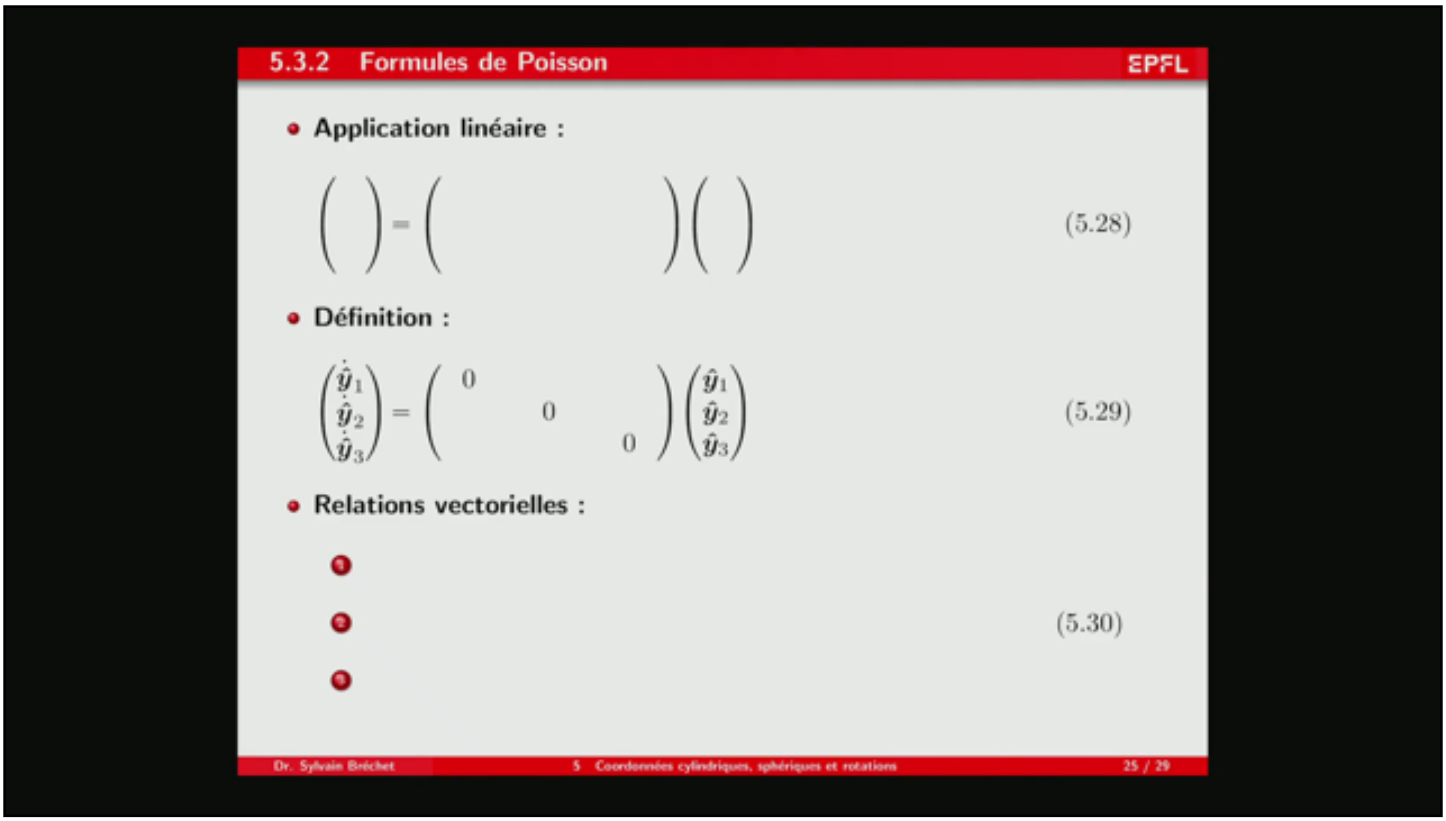


ça ressemble plus à un plus oui merci beaucoup de votre vigilance effectivement c'est un foie tout à fait voilà donc ah mais apparemment c'est pas pari sur le frise donc on va le refaire attendez voir là on voit bien le point c'est effectivement un point c'est YI chapeau point produit scalaire avec YK chapeau plus YI chapeau produit scalaire avec YK chapeau point c'est deux produits scalaires maintenant alors justement si on prend le fameux YK chapeau point qu'on exprime comme combinaison linéaire des YI chapeaux peut prendre la relation 5,23 et on remplace l'indice Y par un indice K on aura alors la somme sur J égal à 1 à 3 des oméga KJ YJ chapeau d'accord et si on regarde ces deux termes on voit qu'il y a des produits scalaires qui apparaissent entre les vecteurs unitaires or le produit scalaire de deux vecteurs unitaires par la relation d'autonomalité qui se trouve ici c'est le symbole de chronécaire et donc le seul terme en J qui va contribuer ici au résultat c'est le terme en J pour lequel J vaut K on a une situation analogue ici le seul terme en J qui va contribuer c'est le terme pour lequel J vaut Y donc il va nous rester oméga IK fois delta JK qui est égal à 1 puisqu'on a pris J égal à K et on se retrouvera ici avec un oméga KI donc on a oméga IK plus oméga KI qui est égal à 0 ce qui signifie concrètement oméga KI et l'opposé d'oméga IK quel que soit les indices I et K en d'autres termes on a une structure avec deux indices qui apparaissent comme pour une application linéaire on peut écrire ceci matriciellement et la matrice dont les coefficients sont les oméga KI d'accord cette matrice est antisymmétrique c'est ce qu'on vient de montrer d'ailleurs si vous avez une matrice antisymmétrique les

notes

résumé

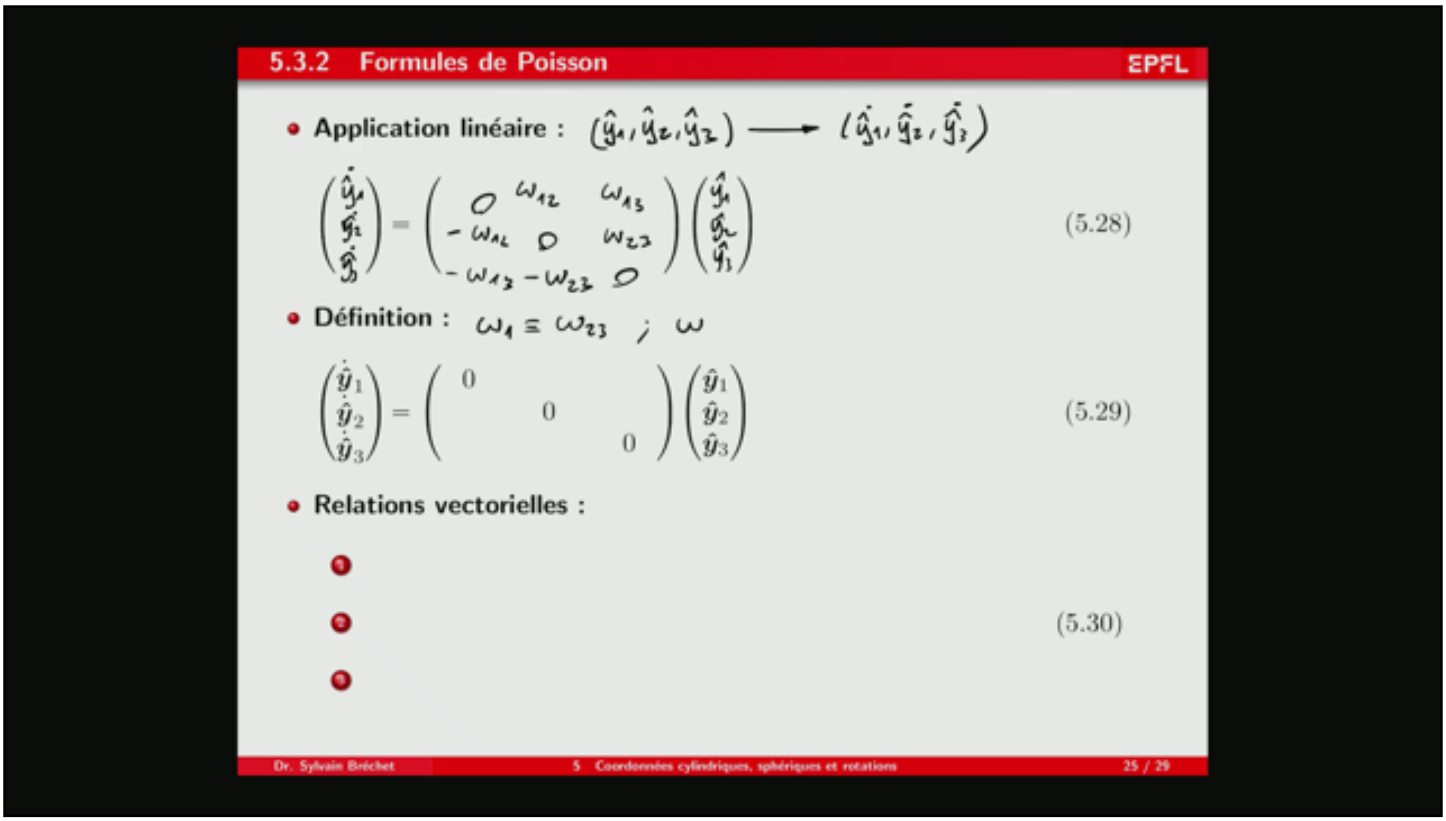
97m 25s



termes diagonaux sont nuls or justement les oméga IK sont égal à d'accord cette matrice décrit une application linéaire cette application linéaire on va maintenant la caractériser ensemble ok

notes

résumé

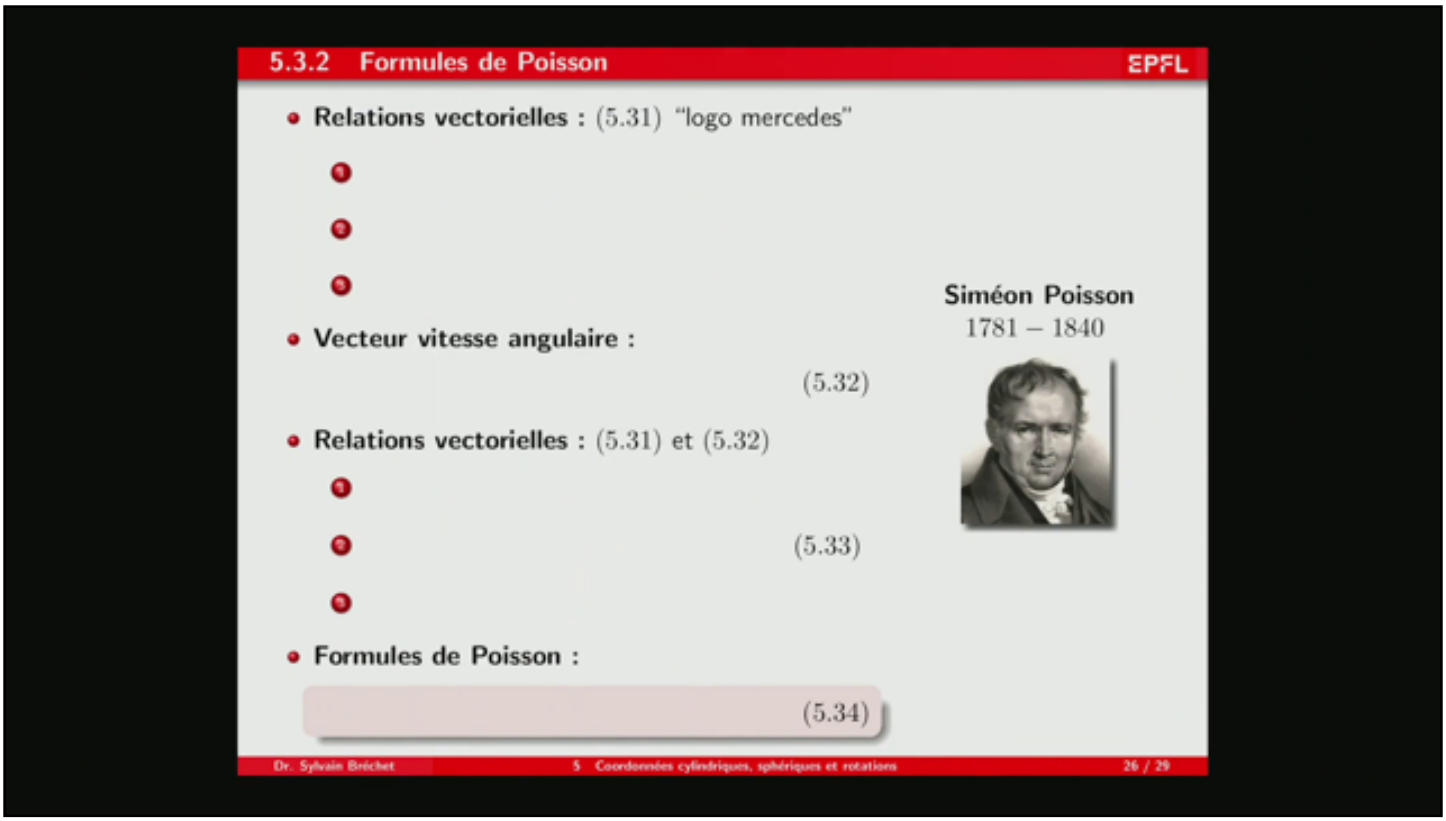


cette application linéaire elle envoie un vecteur dans les composantes sont les vecteurs unitaires Y1 chapeau Y2 chapeau ce vecteur de départ et envoyer sur le vecteur image constituer des dérivés temporelles des vecteurs unitaires Y1 chapeau Y2 chapeau et Y3 chapeau point d'accord voilà la structure donc on met ici à gauche Y1 chapeau Y2 chapeau et Y3 chapeau à droite pardon et à gauche on a les dérivés temporelles de ces vecteurs unitaires d'accord et maintenant on applique la définition on a les coefficients qui sont des oméga avec des indices qui sont les indices de ligne et de colonne commençons par les termes qui sont en dessus de la diagonale on aura oméga 1 2 oméga 1 3 ainsi que oméga 2 3 les termes diagonaux par définition sont nuls qu'en est-il maintenant des termes qui se trouvent sous la diagonale et bien comme la matrice est antisymmétrique c'est l'opposé des termes qui sont en dessus de la diagonale à savoir moins oméga 1 2 moins oméga 1 3 moins oméga 2 3 ok si vous regardez bien cette matrice elle a combien de coefficients indépendants il y en a exactement on est en dimension 3 qu'est ce qu'on peut créer avec 3 composantes un vecteur et c'est ce qu'on va faire on va définir un vecteur qui va faire intervenir les composantes qu'on voit ici qui va être en fait le vecteur vitesse angulaire et qui aura l'orientation qui est celle donnée par la main droite pour une rotation dans un plan donné alors pour faire ça il faut faire la bonne identification et il faut se rappeler que derrière quelque chose d'antisymmétrique se cache le groupe des permutations et alors on va définir la première composante de notre vecteur oméga 1 comme oméga 2 3 la deuxième oméga 2

notes

résumé

100m 1s



ce sera oméga 3 1 la troisième oméga 3 ce sera oméga 1 2 d'accord ? 1 2 3 et on tourne en boucle attention on n'a pas oméga 3 1 on a oméga 1 3 donc ceci c'est l'opposé de oméga 1 3 d'accord ? maintenant on reprend notre grille du loto notre matrice et on va remplacer les oméga par les nouveaux oméga qui sont les composants du vecteur qui sera le vecteur vitesse angulaire et on va se retrouver avec sur la première ligne 0 et sur la troisième ligne on aura oméga 2 sur la deuxième ligne on aura moins oméga 3 0 ainsi qu'oméga 1 et sur la troisième ligne on aura moins oméga 2 et 0 d'accord ? voyez au passage qu'il y a une alternance entre les signes positifs et négatifs qui est justement dû à la présence du groupe des permutations qui se cache en filigrane derrière donc maintenant qu'on a cette structure on va développer en écrivant 3 équations vectorielles qui sortent de cette définition d'accord ? la première c'est celle qui nous donne y1 chapeau point si on regarde notre matrice et qu'on fait le calcul matriciel oméga 3 y2 chapeau moins oméga 2 y3 chapeau ensuite pour y2 chapeau point on aura y1 y3 chapeau moins oméga 3 y1 chapeau et finalement pour y3 chapeau point on va se retrouver avec oméga 2 y1 chapeau moins oméga 1 y2 chapeau bon ce qu'on aimerait c'est une simple disons qui vont nous donner les dérivés temporelles des vecteurs unitaires en termes de ces vecteurs unitaires en faisant apparaître le vecteur vitesse angulaire le vecteur vitesse angulaire sera du type oméga 1 y1 chapeau plus oméga 2 y2 chapeau plus oméga 3 termen c'est pas ce qu'on voit là-dedans alors comment est ce qu'on pourrait le faire apparaître ? on pourrait le faire apparaître avec des produits vectoriels on pourrait exprimer

notes

résumé

102m 23s

5.3.2 Formules de Poisson

- **Relations vectorielles :** (5.31) "logo mercedes"
  1.
  2.
  3.
- **Vecteur vitesse angulaire :**

(5.32)

- **Relations vectorielles :** (5.31) et (5.32)
  1.
  2. (5.33)
  3.
- **Formules de Poisson :**

(5.34)

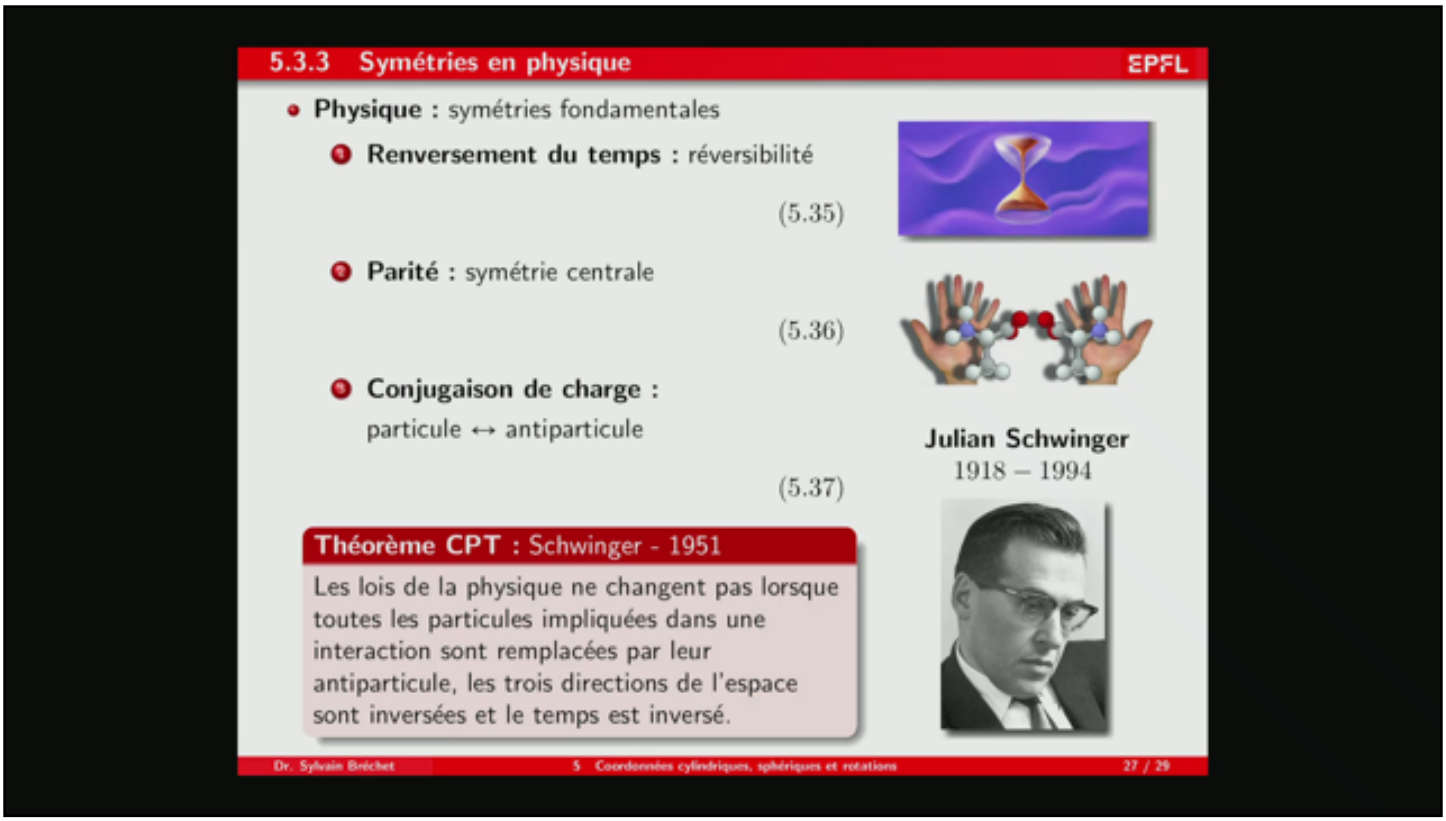
Siméon Poisson
1781 – 1840



de manière astuciuse y2 chapeau et y3 chapeau comme le produit vectoriel de deux vecteurs unitaires respectivement d'accord ? alors c'est ce qu'on va faire on va le faire on va montrer que c'est équivalent bon

notes

résumé

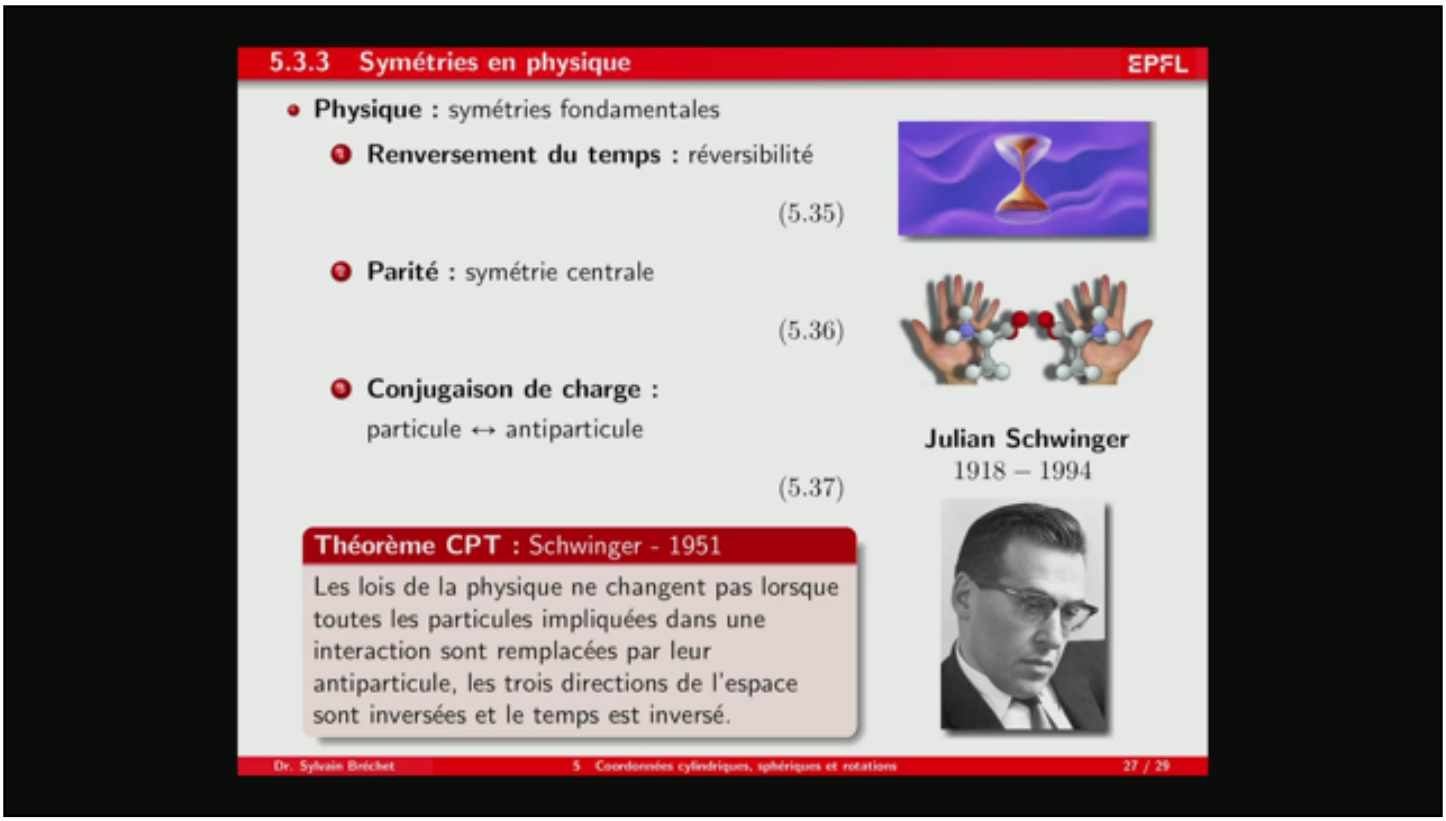


écrivons-le de la manière suivante y1 chapeau point on va l'écrire comme oméga 1 faut-elle produit vectoriel avec un chapeau avec lui-même plus oméga 2 fois le produit vectoriel de y2 chapeau avec y1 chapeau plus oméga 3 fois le produit vectoriel d'y3 chapeau avec y1 chapeau alors ce premier produit vectoriel il est nul puisque les vecteurs sont identiques d'accord ? le deuxième produit vectoriel qui est ici si on prend la règle du logo Mercedes on a le produit vectoriel du 2ème avec le premier ce qui fait le précédent avec un signe moins c'est moins le 3ème c'est donc moins y3 chapeau d'accord ? et puis le produit vectoriel de y3 chapeau avec y1 chapeau c'est le 3ème avec le premier ce qui nous donne le suivant à savoir le 2ème y1 signe moins ici donc c'est moins y3 chapeau, ici on a y2 chapeau voilà écrivons maintenant y2 chapeau.com y1 chapeau fois le produit vectoriel oméga 1 pardon de y1 chapeau produit vectoriel avec y2 chapeau plus 1 oméga 2 fois le produit vectoriel de y2 chapeau avec lui-même et on a un dernier terme qui sera oméga 3 fois le produit vectoriel de y3 chapeau avec y2 chapeau alors le 2ème terme ici il est nul pour le produit vectoriel des 2 premiers vectors unitaires ça nous donne le 3ème ça c'est y3 chapeau d'accord ? et puis dans le dernier terme si on fait le produit vectoriel du dernier vecteur avec le précédent, y2 chapeau on a celui d'avant avec un signe moins c'est un moins y1 chapeau ok ? pour la progression établir y3 chapeau point qui est oméga 1 fois le produit vectoriel de y1 chapeau avec y3 chapeau plus oméga 2 fois le produit vectoriel de y2 chapeau avec y3 chapeau et on a un dernier terme qui est oméga 3 fois le produit vectoriel de y3 chapeau avec lui-même ce

notes

résumé

105m 11s



dernier produit vectoriel est nul pour le premier lorsqu'on fait le produit vectoriel du premier vector unitaire avec le précédent qui est le 3ème on a celui d'avant avec un signe moins c'est moins y2 chapeau le produit vectoriel du 2ème et le 3ème le suivant qui est le premier avec un signe plus c'est y1 chapeau alors maintenant si vous regardez ces résultats spécialement ceux qui sont sous des accolades vous comparez ceci avec les relations vectorielles 530 et si vous avez un rapport c'est exactement les mêmes équations d'accord ? oui mais on a une structure superbe qui sort laquelle est-elle ? regardez bien les membres de droite prenons la première ligne on a un produit vectoriel dans 3 termes et on a chaque fois dans le membre de droite dans le dernier terme du produit vectoriel le vector unitaire en question y1 chapeau sur la 2ème ligne c'est y2 chapeau sur la 3ème c'est y3 chapeau qu'est ce qu'on a en préfecteur ? les composantes de omega le vector vitesse angulaire omega à 3 composantes qui sont omega1 y1 chapeau plus omega2 y2 chapeau plus omega3 on a donc obtenu comme dérivé temporal d'un vector unitaire le produit vectoriel du vector vitesse angulaire avec ce même vector unitaire ok ? donc nos relations vectorielles sont beaucoup plus simples qu'elles y paraissent la dérivé temporelle du premier vector unitaire c'est le produit vectoriel du vector vitesse angulaire qu'on vient de définir avec ce premier vector unitaire je mettra un un chapeau ici voilà la dérivé temporelle du 2ème vector unitaire c'est le produit vectoriel du vector vitesse angulaire avec ce deuxième vector unitaire et la dérivé temporelle du 3è vector unitaire C'est le produit vectoriel du vector vitesse ant slaire avec ce 3ème vector unitaire donc de manière condensée si on prend le im vector unitaire la dérivé temporelle du im vector unitaire yi chapeau point c'est le

notes

résumé

5.3.3 Symétries en physique

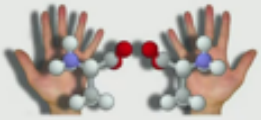
EPFL

- **Physique** : symétries fondamentales
  1. **Renversement du temps** : réversibilité

     (5.35)

     
  2. **Parité** : symétrie centrale

     (5.36)

     
  3. **Conjugaison de charge** : particule ↔ antiparticule

     (5.37)

Julian Schwinger
1918 – 1994

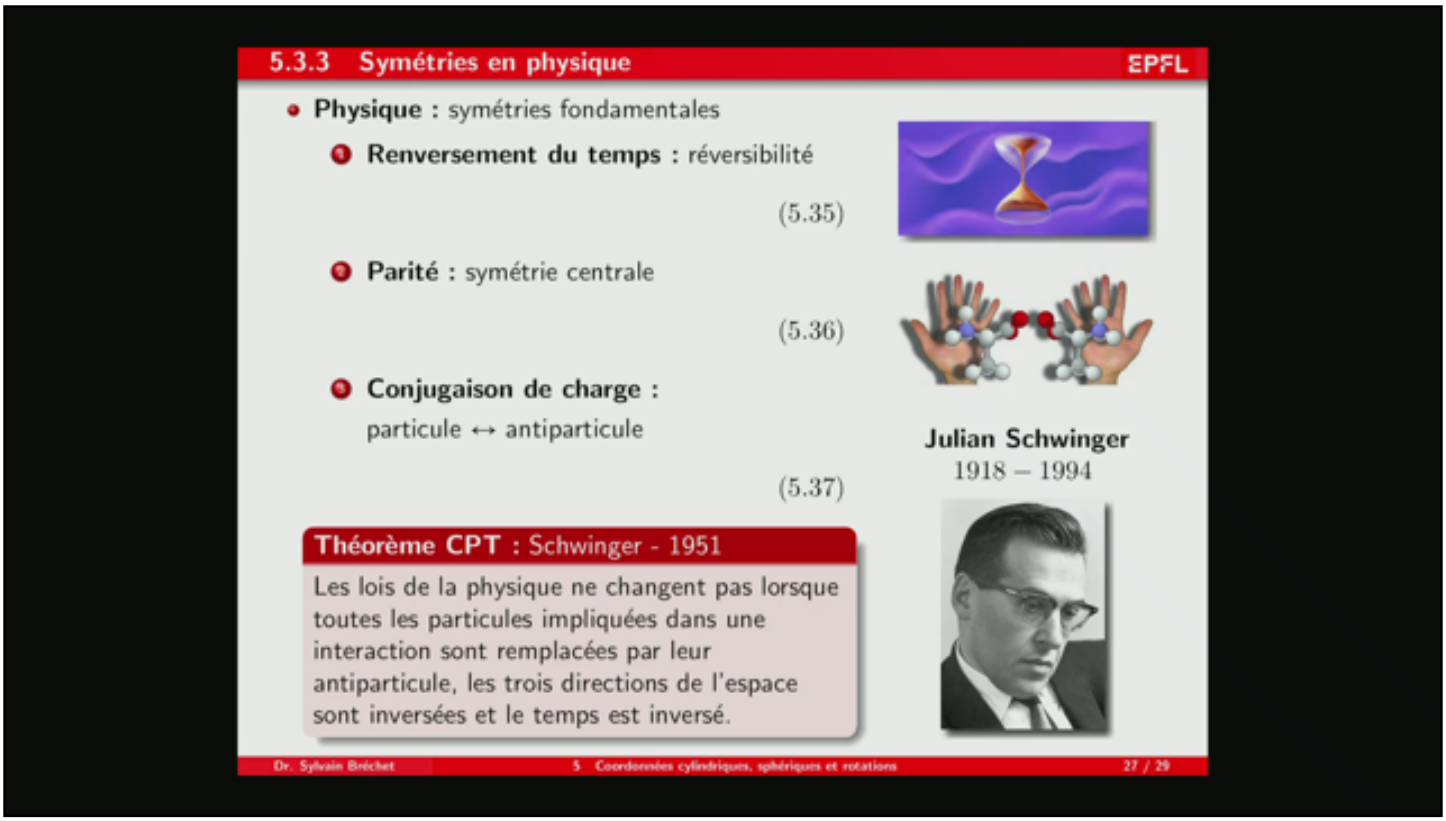


Théorème CPT : Schwinger - 1951

Les lois de la physique ne changent pas lorsque toutes les particules impliquées dans une interaction sont remplacées par leur antiparticule, les trois directions de l'espace sont inversées et le temps est inversé.

notes

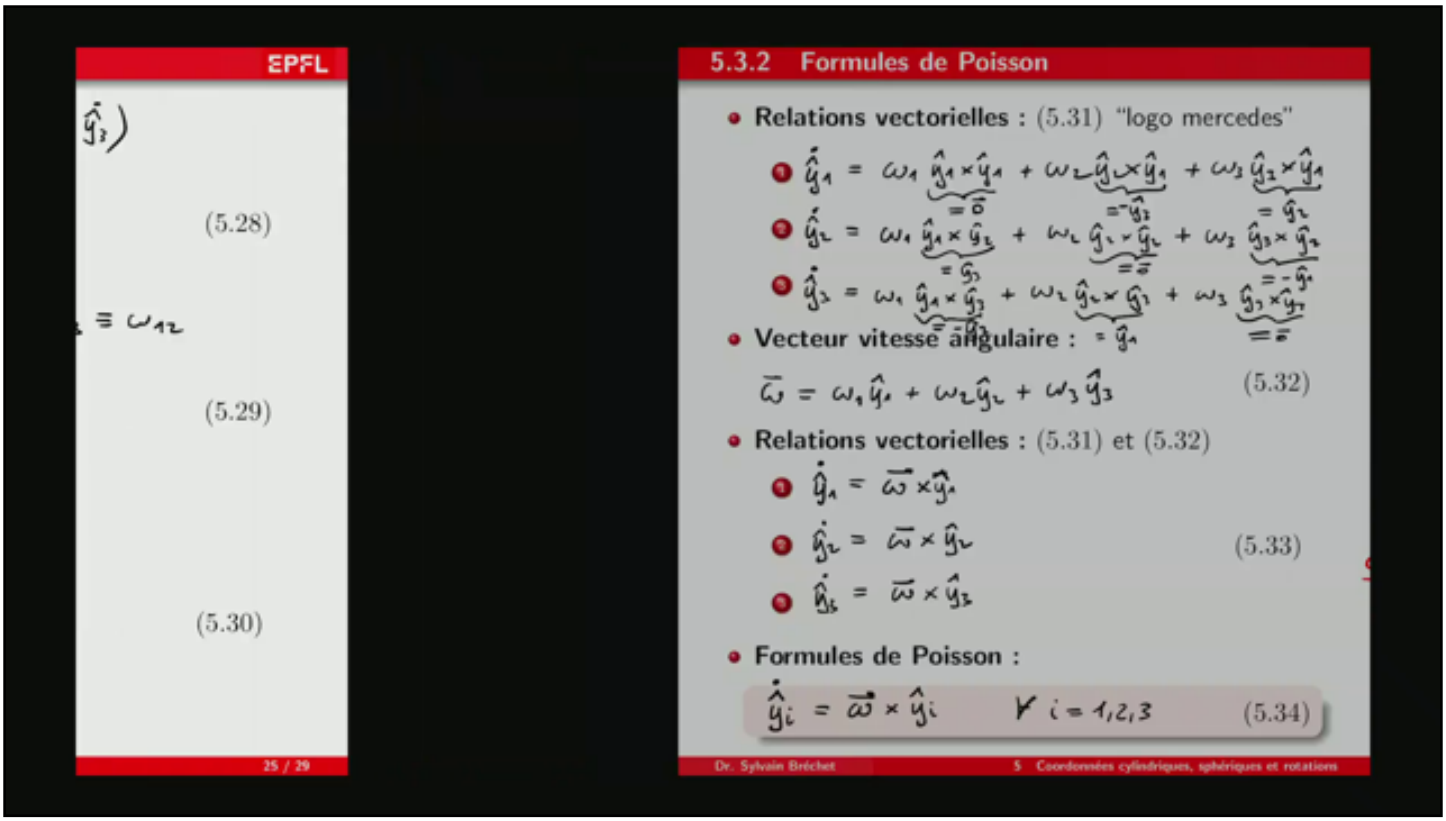
résumé



dans le plan vertical-radial, le pouce, il est toujours horizontal. Quel est le seul vecteur qui est horizontal en cone sphérique ? Ben, cette vecteur, fi-point. Quel est l'angle qui va varier ? C'est l'angle nodale teta-point. Et donc, comme en coordonnées cylindriques, on a fi-point fois z-chapo. Et on ajoute à ceci teta-point fois fi-chapo. Mais on n'a pas encore tout à fait obtenu ce qu'on voulait. Parce que z-chapo, ce n'est pas un vecteur unitaire du repère cylindrique. Donc, qu'est-ce qu'il faut faire ? Il faut exprimer z-chapo en coordonnées cylindriques. Et donc, il faut ici écrire que le vecteur z-chapo, c'est le cosyduz teta-point fois r-chapo moins le sinus teta-point fois teta-chapo. D'accord ? Et là, vous avez vraiment un vecteur vitessangulaire en cone sphérique. Vous voyez qu'il est plus compliqué que celui qu'on obtient en coordonnées cylindriques. C'est normal. On a des dérivées temporelles qui, elles aussi, vont être plus compliquées et qui font intervenir des fonctions trigonométriques d'un langue teta, savoir, le cotsynus, et le sinus de teta. D'accord ? Passons maintenant à la dernière partie, la plus intéressante sur le plan conceptuel. D'accord ? Oui ?

notes

résumé

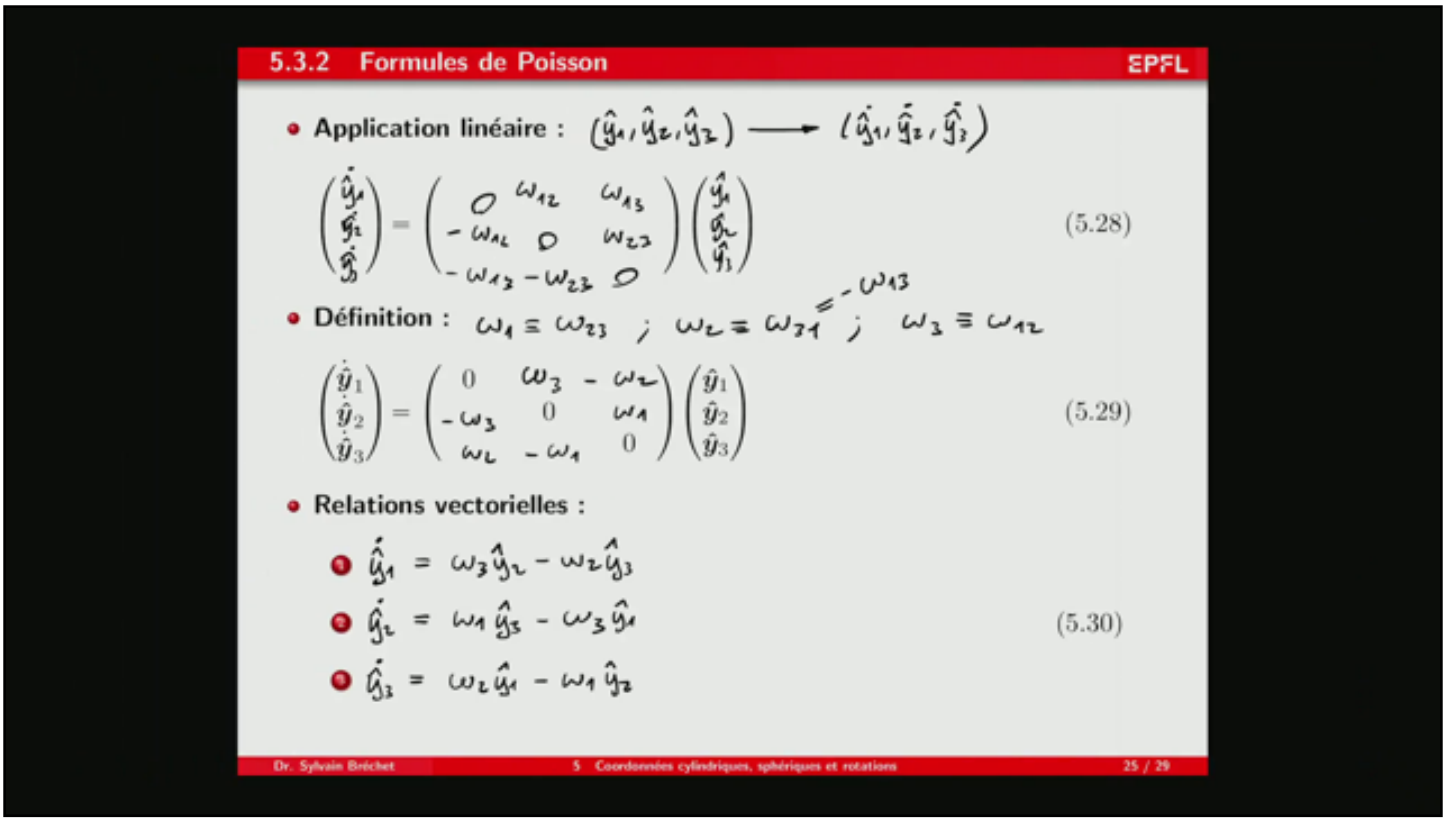


Bonne question. Si on revient en arrière, à un moment donné, dans notre application

notes

résumé

113m 37s

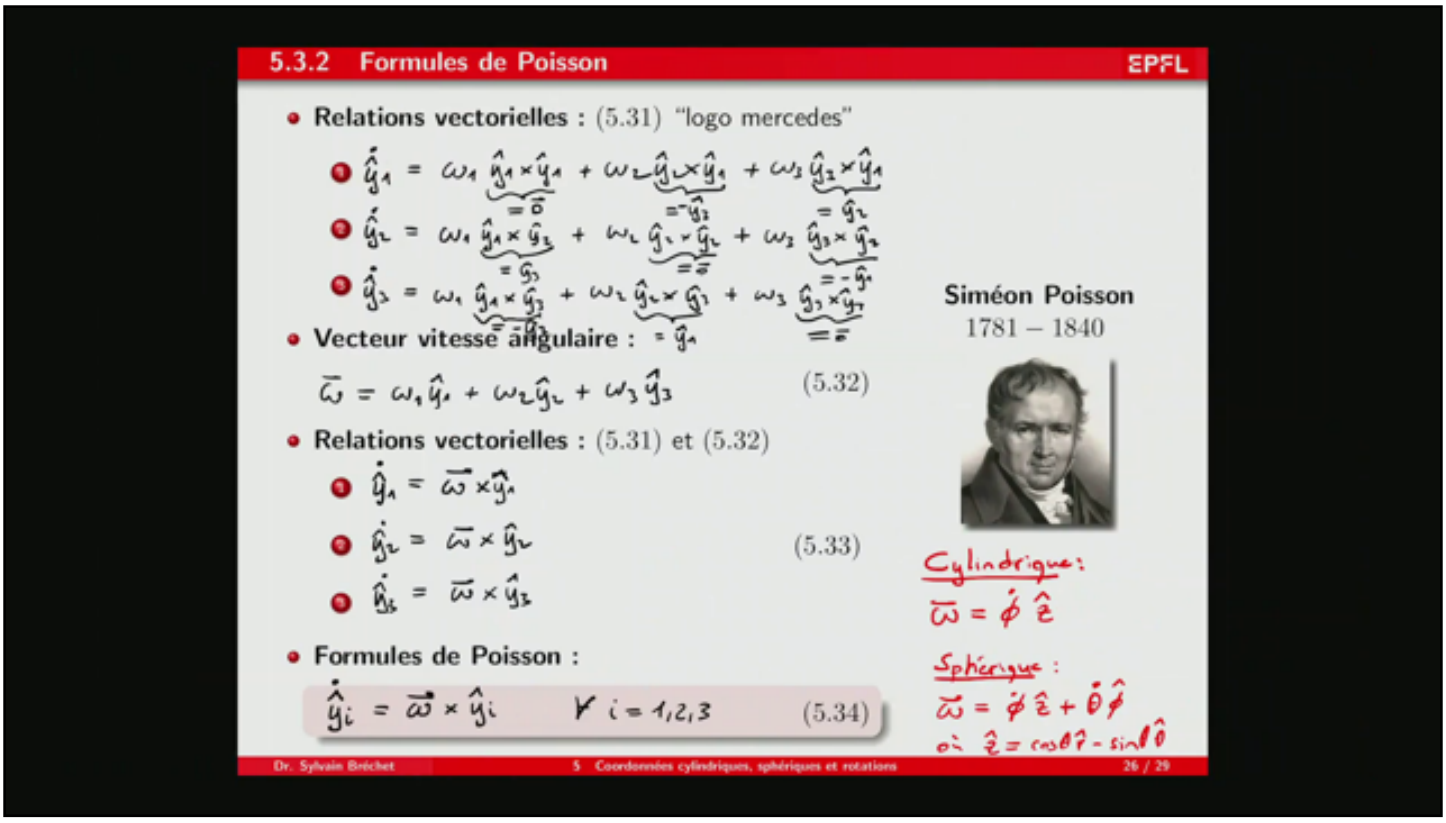


linéaire, on a vu qu'on avait trois paramètres indépendants. Et donc on a voulu faire correspondre à ces trois paramètres indépendants un vecteur. On a voulu établir un isomorphisme entre les trois composantes et les composantes d'un vecteur en prenant comme considération géométrique une convention qui consiste à tenir compte de la règle de la main droite. Et donc si on choisit habilement ces trois composantes, elles correspondent aux vecteurs vitesses anglaires liées aux rotations. Alors on a ensuite développé l'écriture matricielle sous forme de trois équations vectorielles et on a réussi à les remettre en forme pour faire apparaître la structure d'un vecteur dont les composantes sont omega 1, omega 2 et omega 3. Et donc comme on a au préalable choisi avec soin les composantes, on a tenu compte de cette convention qui est la règle de la main droite. Comme c'est une convention, il faut par convention choisir correctement les composantes pour la retrouver. D'accord ? Chose qu'on a faite. C'est pour ça qu'on retombe sur nos

notes

résumé

113m 52s

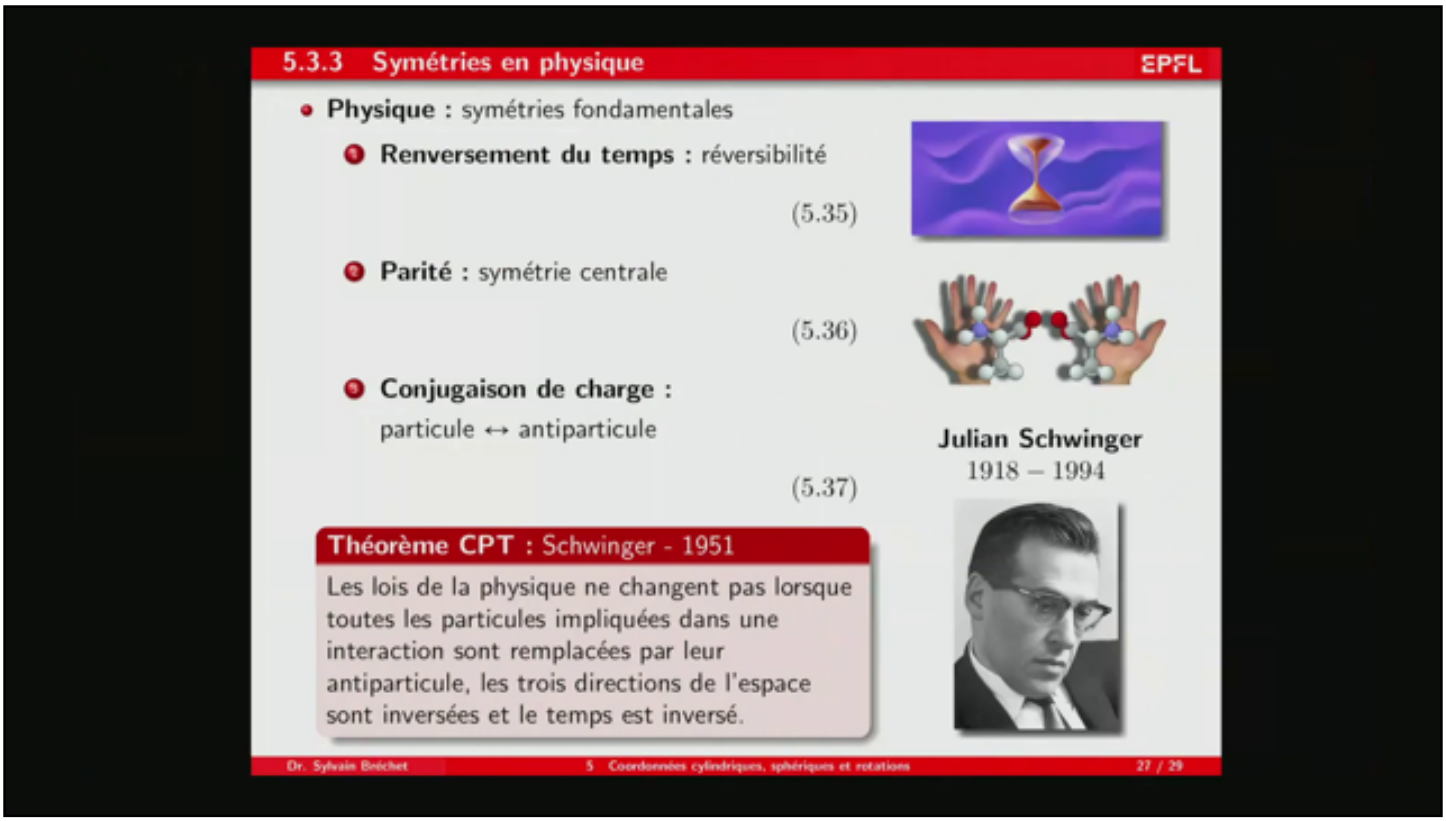


pieds. Mais si vous aviez pris des composantes différemment, vous auriez pas obtenu le même résultat. Prenons un exemple. Si au lieu de prendre la règle de la main droite, on avait pris la règle de la main gauche, on aurait chaque fois pris les... On aurait changé le signe des composantes.

notes

résumé

115m 6s

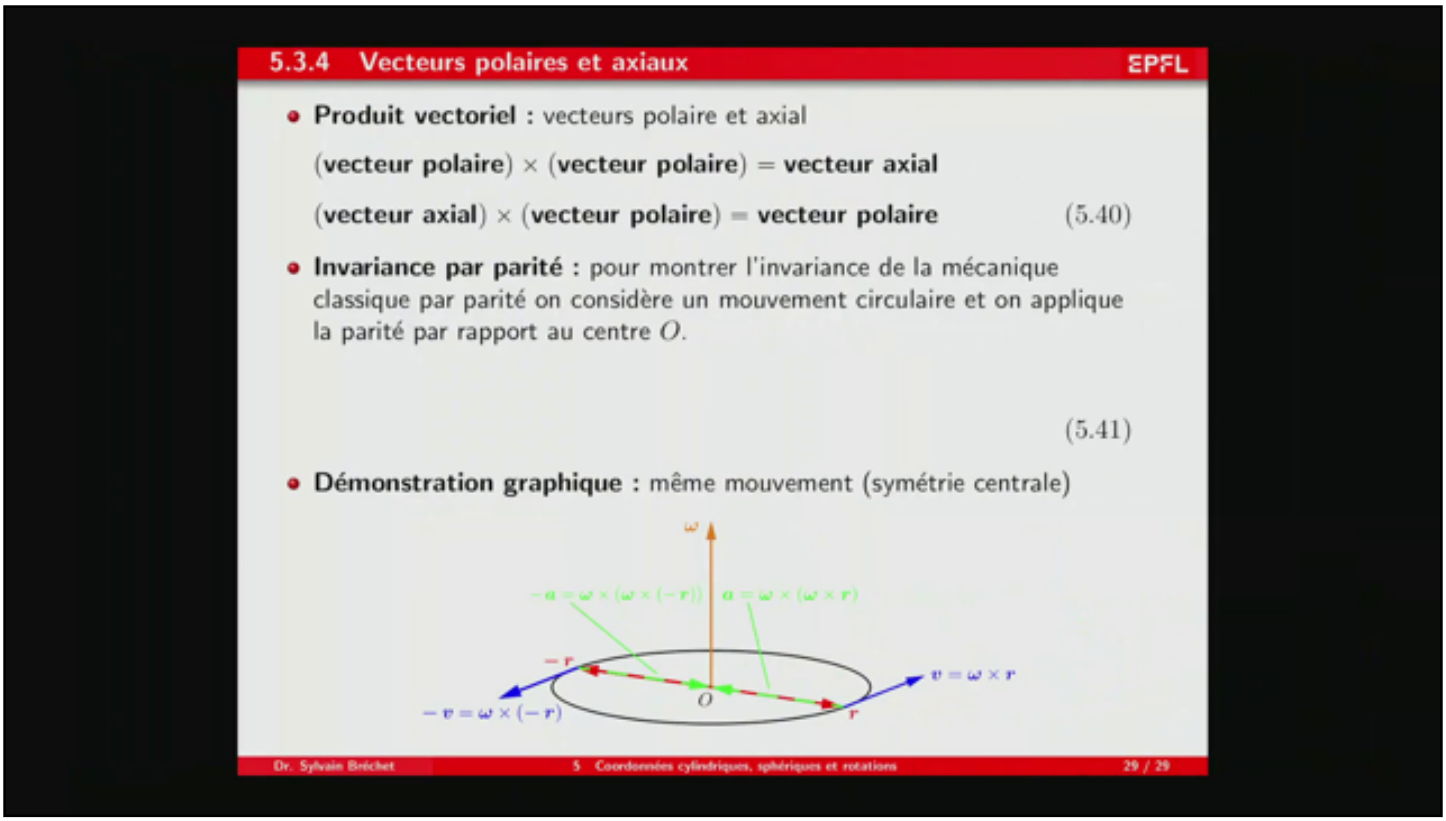


D'accord ? Et si on change le signe des composantes, on se serait retrouvé avec des équations dans lesquelles on a un signe moins qui apparaît ici. Ou alors on aurait dû placer omega dans le monde de droite du produit vectoriel. D'accord ? C'est parce qu'on a choisi la règle de la main droite. Avec la règle de la main gauche, on a un autre résultat. On aurait pu faire quelque chose de plus compliqué. Mais fondamentalement au départ, on a défini le vector vitesse angulaire en tenant compte de cette dualité, main gauche, main droite, et en choisissant la main droite. Et pourquoi est-ce qu'on avait pour commencer cette dualité ? Parce qu'on voulait décrire une rotation et se conserver la symétrie de rotation autour de l'axe. Donc le vector vitesse angulaire ne pouvait être orienté le long de l'axe que vers le haut ou alors vers le bas. D'accord ? Donc c'est une convention qui

notes

résumé

115m 27s

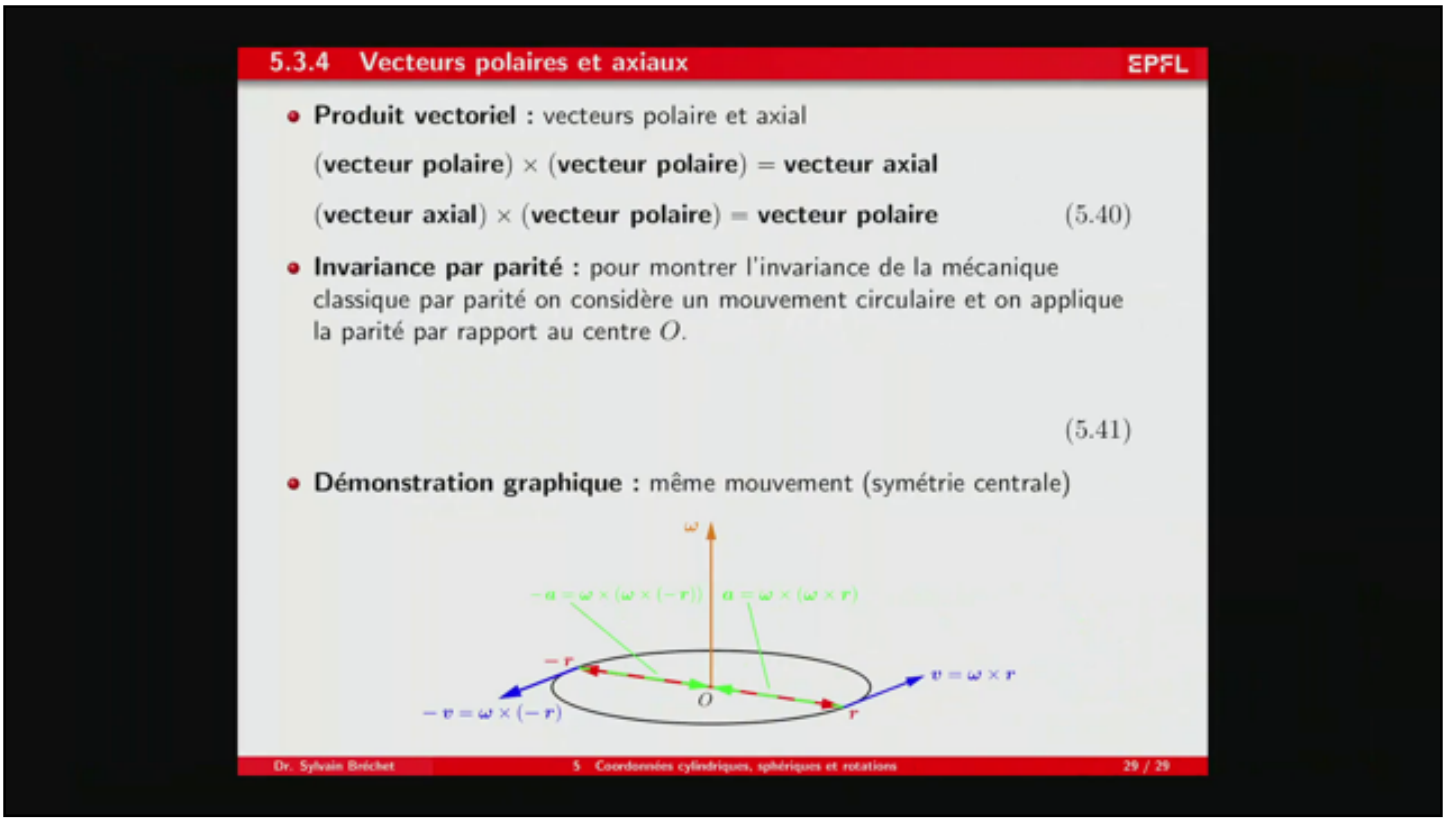


ressort ici dans la structure qu'on a développée. Voilà. Lorsqu'on parle de physique, à l'échelle microscopique, il y a trois symétries fondamentales. Il y a la première symétrie qui est la symétrie de renversement du temps. Vous envoyez le temps sur son opposé, d'accord ? Et si c'est symétrique, les équations de la physique ne changent pas. C'est le cas de l'ossiateur harmonique. C'est un moins. Voilà. C'est le cas de l'ossiateur harmonique non amortie. Ce ne serait pas le cas de l'ossiateur harmonique amortie, par exemple. D'accord ? Ça, c'est la première des symétries. La deuxième, c'est une symétrie spatiale. C'est une symétrie centrale. Alors, c'est une symétrie miroir, d'une certaine manière, même si le miroir, c'est par rapport à un axe seulement. La main gauche est l'image miroir de la main droite. D'accord ? Il faut faire ceci par rapport à tous les axes de coordonnée. Et ça revient à envoyer les vecteurs unitaires. On en repère sur le opposé. C'est ce qu'on appelle la symétrie de parité. Donc, on prend les vecteurs unitaires. Y a chapeau. Y a deux chapeaux. Et Y a trois chapeaux. On va envoyer donc sur le opposé à savoir moins Y a un chapeau, moins Y a deux chapeaux, moins Y a trois chapeaux. D'accord ? Et il y en a une dernière qui consiste à envoyer une particule de charge électrique Q sur son antiparticule dont la charge électrique est l'opposé, c'est moins Q. Donc, on en voit Q sur moins Q. D'accord ? Il y a un théorème fondamental de la physique, oui ? Alors, la règle de la main droite serait uniquement par rapport à un axe. Donc, si j'en vois, si je prends la main gauche par rapport à la main droite, d'accord ? Et je change l'orientation d'un des vecteurs. C'est comme si je changeais le produit vectoriel des deux autres vecteurs, d'accord ? Et ça fait

notes

résumé

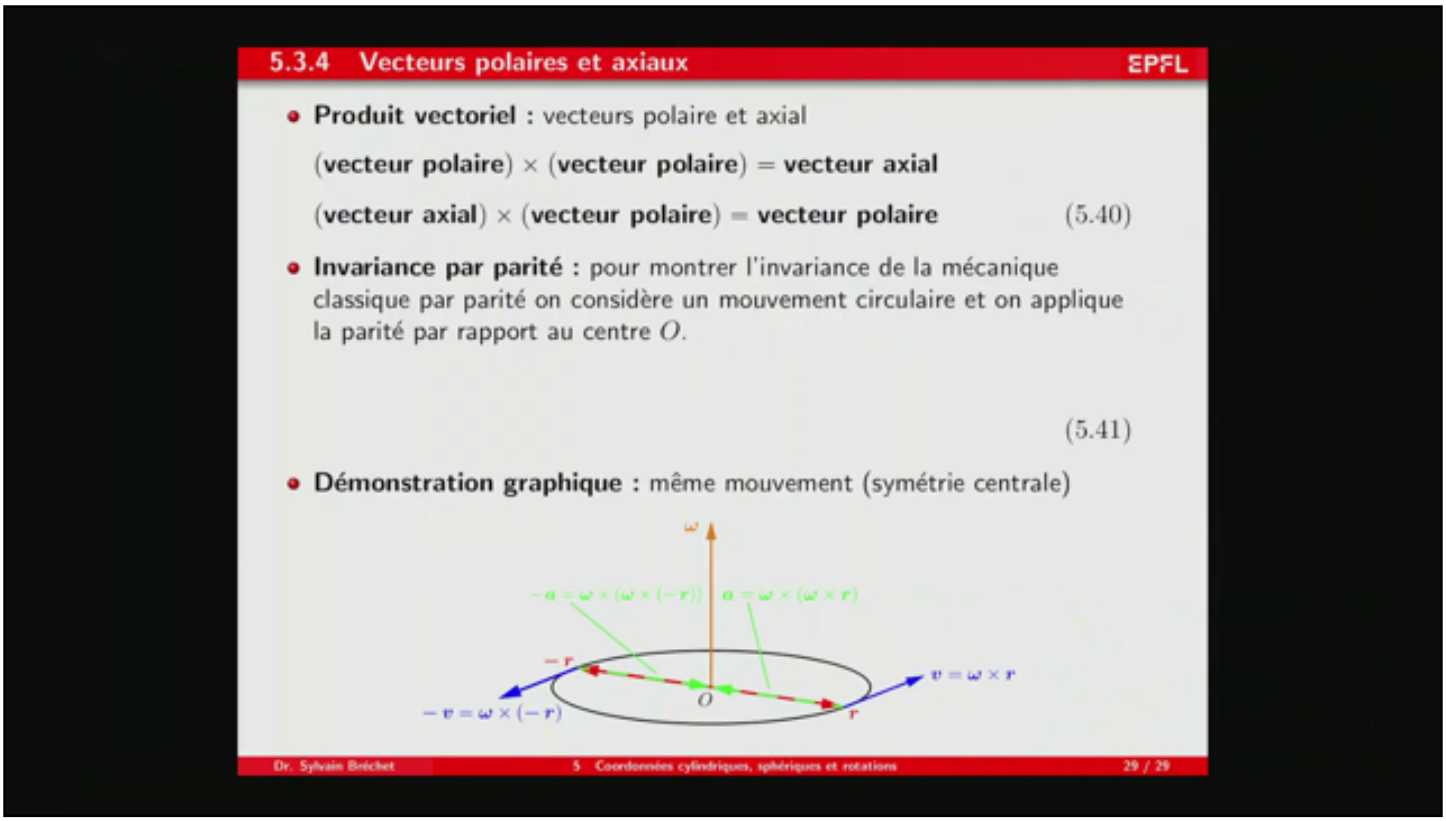
116m 14s



main gauche, main droite, repère direct, repère indirect. D'accord ? Si vous prenez votre main gauche et que vous mettez à côté votre main droite, vous prenez l'axe qui lit la main gauche à la main droite comme étant l'axe isapsis. Si vous envoyez le vecteur unitaire le long de cette axe sur son opposé, vous avez une symétrie par rapport au plan médiateur des deux mains. L'âve dans l'opération, dans la transformation de parité, vous le faites par rapport à tous les axes. Donc, c'est en fait une symétrie centrale au sens de la géométrie, d'accord ? Une symétrie par rapport à un point. Donc, ce qu'affirme le théorème CPT qu'on doit à Schminger, prix Nobel de physique, c'est que si vous prenez les lois fondamentales de la physique, toutes les lois, d'accord ? Et puis que vous remplacez le temps par son opposé, en fait un renversement du temps, vous appliquez la symétrie de parité, d'accord ? Donc, vous remplacez les directions d'espace par le opposé et vous changez les particules en antiparticule, vous obtenez les mêmes équations de la physique. Ce théorème CPT n'a jamais été mis en défaut jusqu'à aujourd'hui dans tous les accélérateurs de particules du monde entier, d'accord ? Si c'était le cas, la relativité restreinte s'effondrait et c'est le château-carte de la physique qui prendrait l'eau. Donc heureusement que ce n'est pas le cas, d'accord ? Alors pourquoi je vous parle de tout ça ? Parce que la transformation qui va nous intéresser maintenant, c'est la transformation de parité. La transformation de parité, donc une application linéaire qui envoie le vecteur formé des vecteurs unitaires du repère sur son opposé, d'accord ? Alors si on prend les vecteurs qui décrivent les grandeurs physiques qu'on a vu jusqu'à maintenant, ils rentrent dans deux catégories. Vous avez des vecteurs qui vont changer de signe sous parité qui s'appellent des vecteurs polaires, c'est en général ce

notes

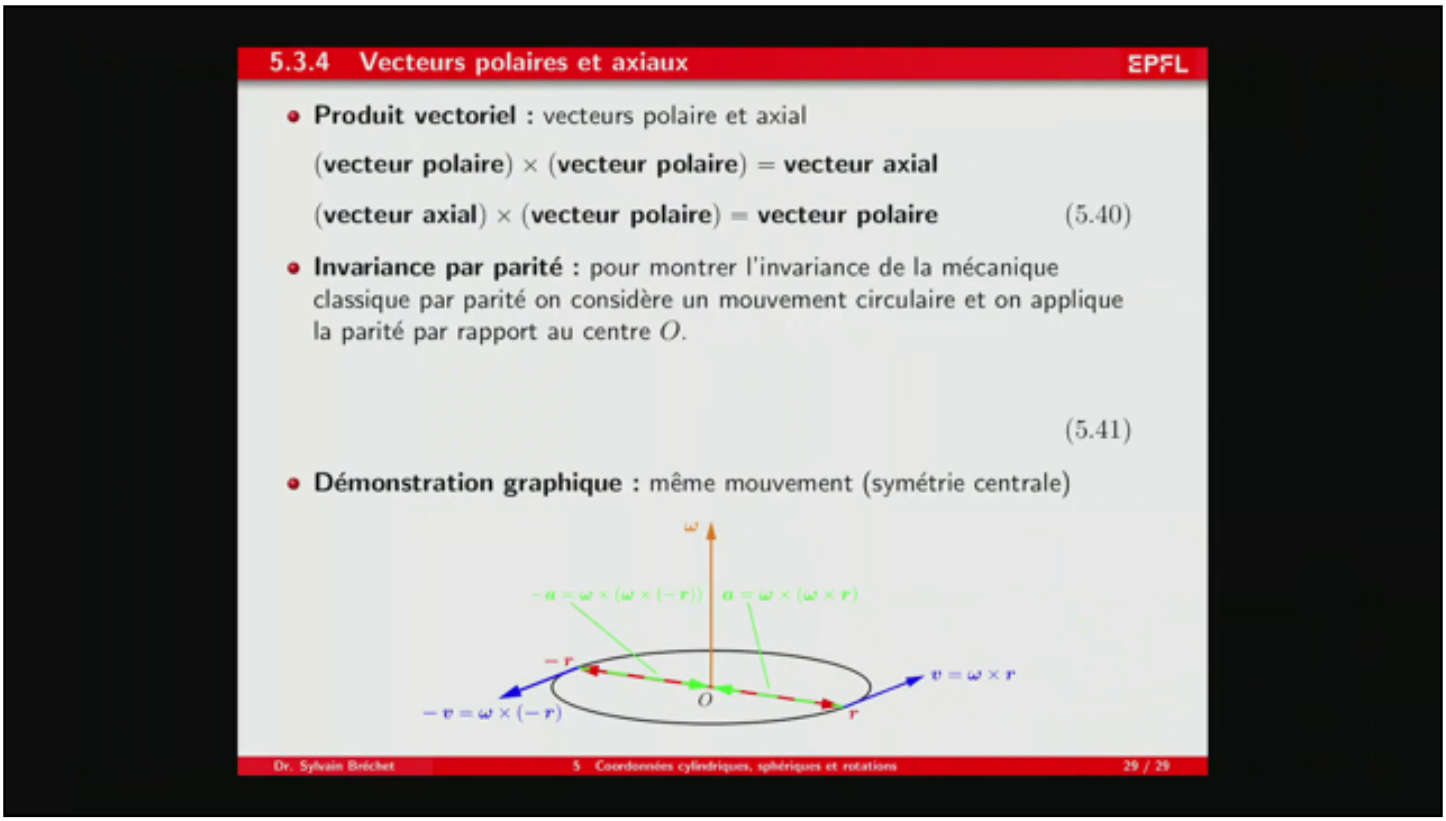
résumé



qu'on conçoit comme un vecteur, et il y a d'autres vecteurs qui ne changeront pas de signe, vous en connaissez déjà, vous allez en voir deux autres dans la suite de ce cours. Alors commençons par le vecteur position. Prenez le vecteur position, vous l'écrivez comme r1 y1 chapeau et r2 y2 chapeau, r3 y3 chapeau, vous envoyez y1 y2 y3 chapeau, les vecteurs unitaires, d'accord ? Sur le reposé, le signe, le vecteur va changer. Donc la vecteur position est envoyée sur son opposé. Maintenant vous prenez la dérivé par rapport au temps. Le temps, il est indépendant des transformations sur l'espace. Donc la dérivé par rapport au temps ne change pas les propriétés par parité des vecteurs. Donc le vecteur vitesse se comporte comme le vecteur position, il va donc changer de signe sous parité. Vous dérivez par rapport au temps le vecteur vitesse, vous avez le vecteur accélération qui lui aussi changera de signe sous parité. Si vous prenez le vecteur vitesse que vous le multipliez par la masse, la masse est un nombre positif. La masse ne change pas de signe lorsqu'on change la direction d'espace et donc le vecteur quantité de mouvement se comporte comme le vecteur vitesse, il change de signe. Prenons le vecteur force maintenant. La force c'est la dérivé temporelle de la quantité de mouvement. Cette dérivé temporelle n'affecte pas les propriétés du vecteur et donc le vecteur force comme le vecteur quantité de mouvement change de signe par parité. Tous ces vecteurs qui caractérisent la dynamique du point matériel quand il n'y a pas de rotation, tous ces vecteurs changent de signe par parité, ce sont des vecteurs polaires. Alors maintenant qu'est-ce qui se passe quand il y a une rotation ? Quand il y a une rotation on a introduit le vecteur vitesse angulaire omega. Et bien ce vecteur contrairement aux autres, il ne va pas changer de signe sous

notes

résumé



parité. Je vous le démontrerai dans un instant. D'accord ? Ce sera aussi le cas du vecteur moment cinétique qui est l'analogue de la quantité de mouvement en rotation. Ce sera également le cas du moment de force qui est l'analogue de la force en rotation. Il ne change pas de signe, ce sont des vecteurs actions, en fait ce sont des faux vecteurs puisque lorsqu'on fait le produit vectoriel de deux vecteurs pour en obtenir un troisième, et bien le vecteur qu'on obtient a pour norme une surface parce que ce n'est pas un vrai vecteur, c'est une construction mathématique qui permet d'encoder une information sous la forme d'un vecteur. C'est ça. On parle d'axial parce qu'on se réfère à un axe de

notes

résumé



notes

résumé

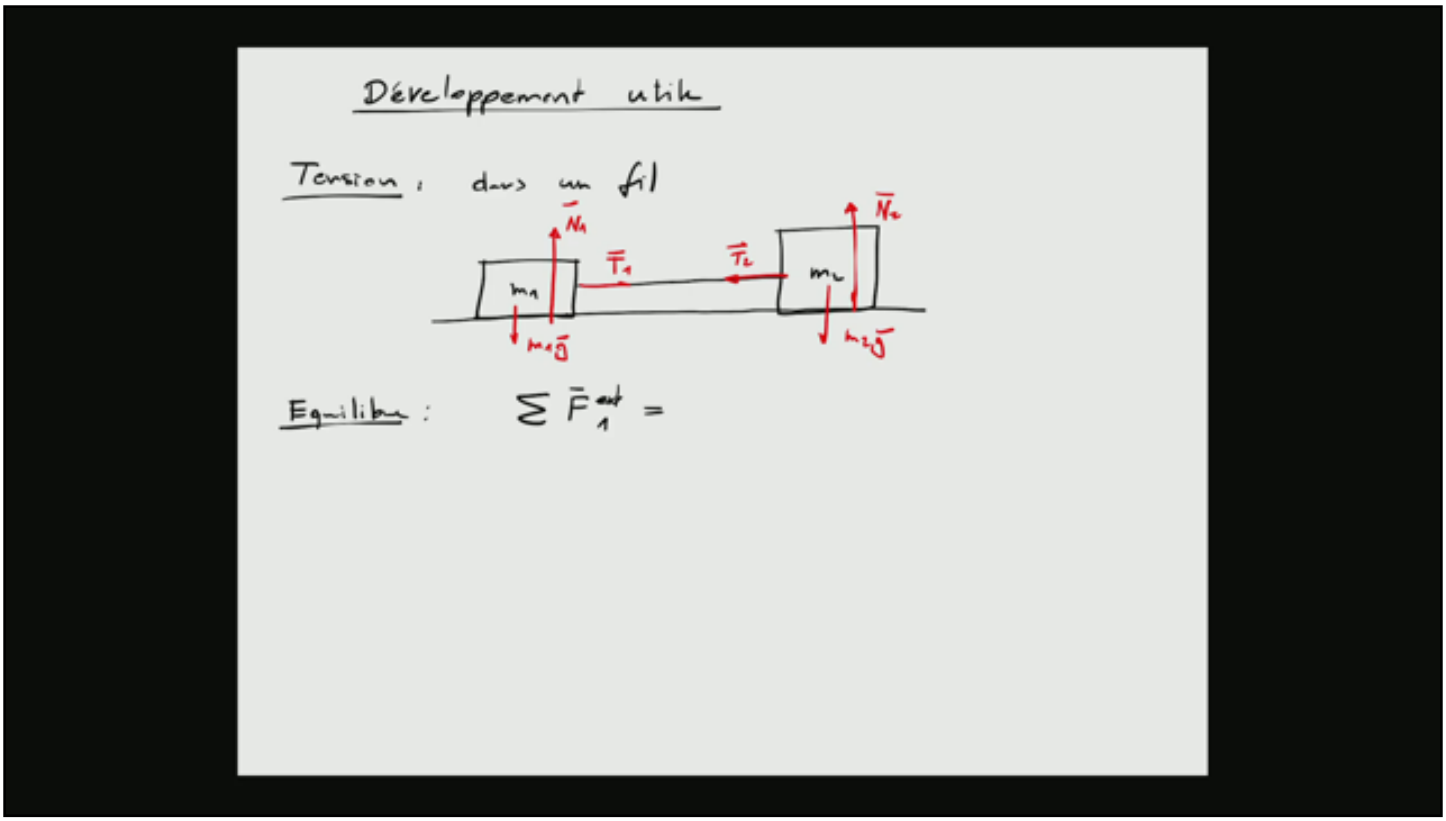
122m 52s



on peut la comprendre en regardant le mouvement lui-même. Prenons un mouvement circulaire donc le long de la trajectoire qui apparaît ici en noir, supposons que le mouvement est lieu dans le sens trigonométrique donc le vecteur vitesse angulaire omega est orienté vers le haut. D'accord ? Si on fait le produit vectoriel de omega avec r, on trouve v, v qui est engeant-ciel dans le sens du mouvement. D'accord ? Alors maintenant, appliquons la transformation par parité. Elle fait quoi ? Elle envoie le vecteur position sur son opposé donc c'est le point qui est diamétralement opposé sur la trajectoire. Le vecteur position a changé de signe. Le vecteur vitesse aussi, il est engeant à la trajectoire mais dans le sens opposé. D'accord ? Et bien le produit vectoriel de omega avec moins r nous donne moins v. Vous pouvez le faire avec votre main droite, vous alignez l'index selon omega, le majeur selon moins r ça donne moins v et vous faites une rotation de 180 degrés et voyez que le produit vectoriel de omega avec r vous donne v. C'est donc le même mouvement. On est juste aux antipodes, on est décalé d'un quart de période par rapport au mouvement de départ. D'accord ? On décrit le même mouvement donc la mécanique classique est invariance sous cette opération de parité. C'est la raison pour laquelle on peut décrire cette mécanique en introduisant des vecteurs axiaux et avoir une description qui peut se faire dans le cadre d'un espace vectoriel. D'accord ? J'aimerais terminer rapidement. Attendez. Ah, il y a un petit problème avec... Attendez voir. Apparemment la page que je voulais vous montrer ne s'est pas affichée donc ce qu'on va faire, attendez voir, j'en crée une nouvelle et je fais rapidement

notes

résumé

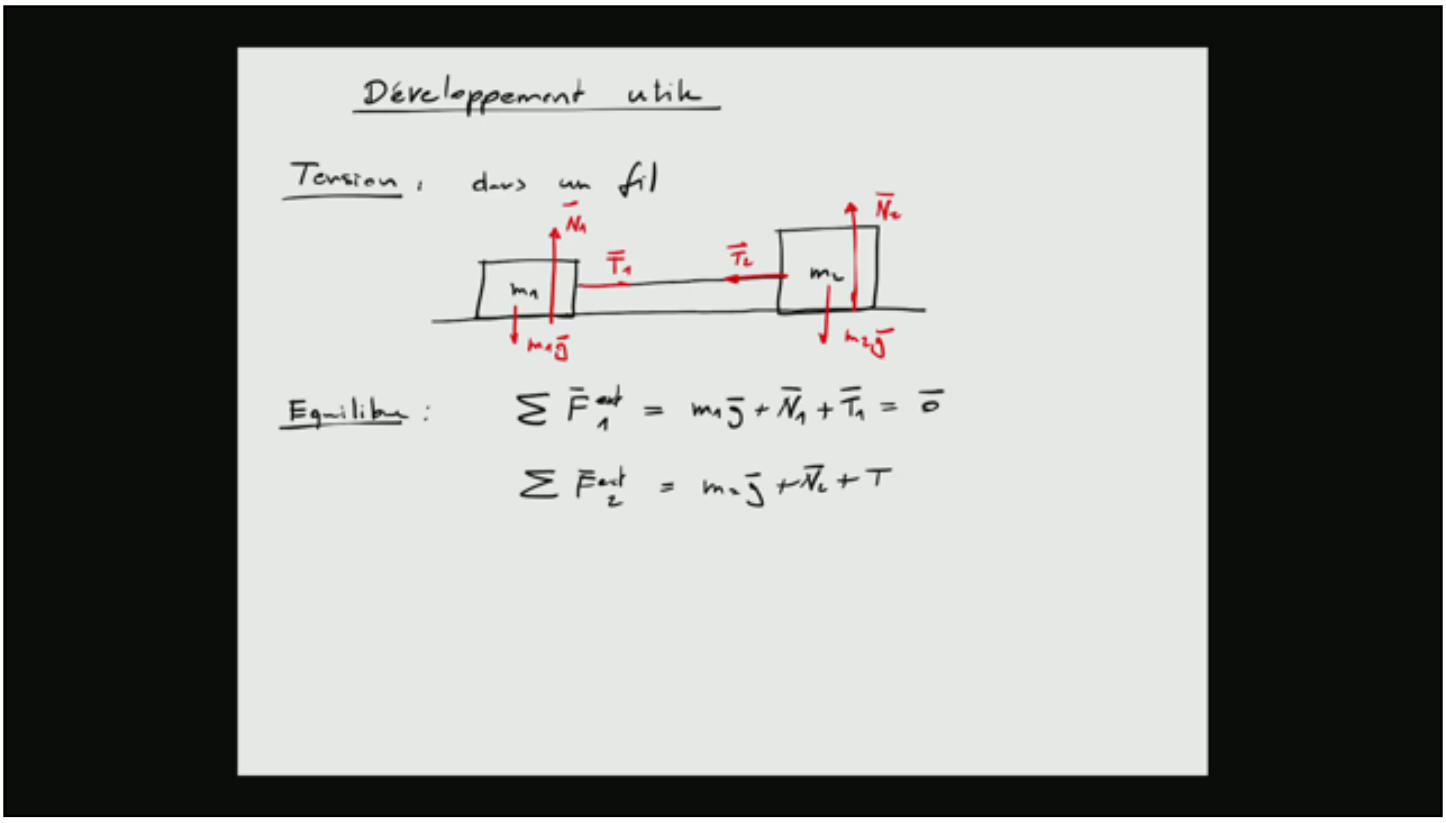


des seins. Voilà ce que je voulais vous montrer pour terminer, c'est un développement qui sera utile parce que en fin de semaine, vendredi, vous aurez à disposition l'énoncé de l'exercice à rendre pour la semaine suivante. Cet exercice est corrigé mais il n'est pas noté en tant que tel. Par contre vous allez recevoir un feedback sur ce que vous aurez fait. D'accord ? Vous assistons, corrigerons vos exercices et vous aurez besoin d'un petit complément d'information pour résoudre ce problème. Donc ce complément je vais maintenant vous le donner. Donc le complément concerne l'attention qui apparaît dans un fil. On prend dans la situation suivante, supposons qu'on ait un bloc ici, de masse M1, un autre bloc de masse M2, ils sont reliés par un fil, on se retrouve sur une surface horizontale, on a trois forces qui apparaissent, le poids est mangé du premier bloc, la force de réaction normale N1 est la tension dans le fil T1. De manière symétrique on a une tension dans le fil T2, on a un poids M2G, et une force de réaction normale N2. Alors ce qu'on peut maintenant faire dans la situation particulière où on est à l'équilibre c'est écrire les lois de Newton pour chacun les deux blocs séparément, c'est ce que vous devrez faire en exercice.

notes

résumé

126m 53s



Vous écrivez que la somme des forces extérieures qui s'exercent par exemple sur le premier bloc, c'est son poids M1G plus la force de réaction normale N1 plus la tension T1. On est à l'équilibre, la somme des forces est nue. On peut le faire aussi pour le deuxième bloc, toujours à l'équilibre, c'est son poids M2G plus la force de réaction normale N2 plus la tension T2. Concrètement, comme le système est à l'équilibre, qu'il y a deux forces qui sont horizontales, T1 et T2, il faudra nécessairement que ces forces se compensent pour que la somme des forces exercer sur le système forme et les deux blocs soient nul. Et donc on arrive à la conclusion, c'est celle dont vous aurez besoin d'exercice, que la norme de la tension dans le premier bloc est égale à la norme de la tension dans le deuxième bloc. On comprendra au chapitre 8 de secours que ce sont des forces intérieures et que ces forces sont des forces d'action et de réaction qui se compensent. Et puis évidemment que les forces de réaction normale compensent les poids Alors cette situation en la live, elle est très simple, celle que vous aurez en exercice à rendre, elle est beaucoup plus subtile. D'accord ? Ce ne sera pas le cas statique, ce sera le cas dynamique. Mais vous aurez besoin de cette information, raison pour laquelle je vous la donne, je vous souhaite un excellent affêtis et on se retrouve cet après-midi à 15h pour la suite.

notes

résumé

128m 38s